АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

QA
1
A373
1955
no 1-6

## МАТЕМАТИКА

### РЕФЕРАТЫ

1—2979

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 1—6 1955
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ
ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА
РЕФЕРАТЫ
1—2079

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
# МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

**Рефераты 1—547** **№ 1** **Январь 1955 г.**



ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD
ČESKOSLOVENSKO-SOVĚTSKÝ INSTITUT
Praha I, Jánská ul. 100


## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1. **Годичное общее собрание Академии наук Казахской ССР.** Вестн. АН КазахССР, 1954, № 5, 35—37

Обзор работы общего собрания Академии наук Казахской ССР 8 апреля 1954 г., посвященного итогам научной деятельности Академии за 1953 г. и задачам на 1954 г.

2. **Развитие теории вероятностей и математической статистики (Всесоюзное совещание в Киеве).** **Рвачева Е. Л.**, Вестн. АН СССР, 1954, № 1, 100—102

Сообщается о докладах, прочитанных на Третьем Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике, состоявшемся в Киеве 28 сентября — 2 октября 1953 г.

3. **Научная сессия 1953—1954 гг. (ЛГУ). Тезисы докладов по секции математических наук (математика, механика, астрономия).** Л., 1954

Приводятся, в частности, тезисы следующих докладов по математике: Б. А. Венков, Об одном классе евклидовых многогранников; В. П. Скитович, Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения; С. Г. Михлин, Эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области.

4. **Юбилейный научный съезд по случаю 150-й годовщины рождения Иоганна Бойаи** (в подлиннике Больяи) **в Будапеште.** Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 3, 297

5. **Сообщение о деятельности Президиума Чехословацкой академии наук. Шорм** (Zpráva o činnosti Presidia Československé akademie věd. Šorm František), Věstn. Českosl. akad. věd., 1953, **62**, № 5—6, 110—112 (чеш.)

6. **Доклады и дискуссии в Пражском математическом обществе.** Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 3, 298—299

Приводится список сделанных докладов.

7. **Заметка о коллоквиуме по функциям нескольких переменных, состоявшемся в Брюсселе 11—14 марта 1953 г. Годо** (Note sur le Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, du 11 au 14 mars 1953. Godeaux Lucien), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 3, 196—197 (франц.)

Сообщается о темах прочитанных на коллоквиуме докладов по теории функций комплексных и действительных переменных.

8. **Научная жизнь** (Movimento científico), Gaz. mat., 1953, **14**, № 55, 15—19 (порт.)

Приводятся некоторые данные о математической жизни в Латинской Америке.

9. **Подготовка научных кадров по методике математики в Институте методов обучения АПН. Никитин Н. Н.**, Матем. в школе, 1954, № 4, 82—84

10 К. **Сочинения Анри Пуанкаре. Т. I** (Oeuvres de Henri Poincaré, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences par la section de géométrie, I vol., Gauthier-Villars, Paris, 1954), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 10, 1176 (библ.)

11 К. **О постановке преподавания курса высшей алгебры в педагогических институтах. Ляпин Е. С.**, Тезисы доклада..., 7 стр., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1954, беспл.

12 К. **О постановке преподавания курса аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и оснований геометрии для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Перепелкин Д. И.**, Тезисы доклада..., 6 стр., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1954, беспл.

13 К. **О постановке преподавания специального курса элементарной математики на физико-математических факультетах педагогических институтов. Брадис В. М.**, Тезисы доклада..., 10 стр., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1954, беспл.

14 К. **О постановке преподавания курса математического анализа в педагогических институтах. Коровкин П. П.**, Тезисы доклада..., 7 стр., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1954, беспл.



M 1826/48 2+8.

15 К. **Математика — царица и служанка естественных наук. Белл** (La mathématique reine et servante des sciences. Bell E. T., 361 pp., 31 fig., bibl., Payot, Paris, 1953, 1300 fr)., Ann. télécommuns, 1954, 9, № 2, A155 (библ.)

16 К. **Как люди научились считать. Берман** (Wie die Menschen zahlen lernten. Berman G. N., 39 s., Aufbau Verl., Berlin, 1953, 1 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1953, № 36, 1545 (библ.)

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

17. **Памяти Макса Дена. Магнус, Моуфанг** (Max Dehn zum Gedächtnis Magnus Wilhelm, Moufang Ruth), Math. Ann., 1954, **127**, № 3, 215—227 (нем.)

Краткий очерк научного творчества М. Дена (1878—1952) с приложением перечней важнейших дат жизни, научных работ и работ, выполненных под его руководством.

18. **Фабио Конфорто. Кизини** (Fabio Conforto. Chisini Oscar), Period. mat., 1954, **32**, № 1, 38 (итал.)

Некролог итальянского математика Фабио Конфорто (родился 13 августа 1909 г., умер 24 февраля 1954 г.).

19. **Список работ проф. Матиаша Лерха. Шкрашек Йосеф**, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 2, 111—122

См. также РЖМат, 1954, 5025.

20. **К. Р. Наир** (41-я сессия Индийской научной ассоциации, Хайдерабад) (K. R. Nair. Forty first session of the Indian Science Congress Association, Hyderabad), Sci. and Culture, 1954, **19**, № 7, Suppl., 10—11 (англ.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности президента статистической секции ассоциации К. Р. Наира.

21. **С. К. Чакрабарти** (41-я сессия Индийской научной ассоциации, Хайдерабад) (S. K. Chakrabarty. Forty first session of the Indian Science Congress Association, Hyderabad), Sci. and Culture, 1954, **19**, № 7, Suppl., 10 (англ.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности президента математической секции ассоциации С. К. Чакрабарти.

22 К. **Введение в историю математики. Ивс** (An introduction to the history of mathematics. Eves Howard, XV+422 pp., Rinehart and Company, Inc., New York, 1953, 6 doll.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 9, 752 (библ.)

23 **РЕЦ. Восточная наука. Уинтер** (Eastern science. Winter H. J. J., VII+114 pp., John Murray, London, 1952, 4s. 6d.) [**Рецензия: Нидем** (Needham Joseph), Nature, 1953, **172**, № 4388, 1018—1019 (англ.)]

24 Д. **О преподавании математики в Московском университете в 1804—1860 гг., Лихолетов И. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

---

**См. также:** 68, 381

## ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

25. **Лемма по рекурсивным функциям и ее применения. Мостовский А.** Бюл. Польской акад. наук, Отд. 3, 1953, **1**, № 7, 275—279

Будем называть число $a$ $(0<a<1)$ общерекурсивным, если существуют общие рекурсивные функции (о. р. ф.) $U(n)$, $V(n)$ такие, что для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ имеет место

$$\left| a - \frac{U(n)}{V(n)+1} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Это определение равносильно (как, согласно автору, доказал Мазур в еще не опубликованной работе) следующему: существует о. р. ф. $W(n)$, принимающая только значения 0 и 1 и такая, что

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W(n)}{2^n}.$$

Теорема 1. Для всякого общерекурсивного действительного числа $a$ существуют примитивно рекурсивные функции (п. р. ф.) $M(n)$, $N(n)$ и $P(n)$ такие, что $P(n) \to \infty$, когда $n \to \infty$, и

$$\left| a - \frac{M(n)}{N(n)+1} \right| < \frac{1}{P(n)+1} \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема 2. Пусть $\Phi(k, n)$ — о. р. ф. такая, что последовательность $\Phi(0, n)$, $\Phi(1, n)$, $\Phi(2, n)$, ... состоит из всех п. р. ф. одного аргумента. Через $Y$ обозначается множество тех $k$, для которых $\overline{\lim}_{n\to\infty} \Phi(k, n) = \infty$. Тогда множество $Y$ не является рекурсивно перечислимым («исчислимым»). (Это множество $Y$ может быть определено предикатом вида $(x)(Ey)B(n, x, y)$, где $B$ — примитивно рекурсивный предикат).

Доказательства теорем опираются на следующую лемму: для всякой о. р. ф. $F(n)$ существует п. р. ф. $H(n)$ такая, что 1) $H(n) \leqslant H(n+1)$ для $n=0, 1, 2, \ldots$, 2) $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$, 3) $F(H(n))$ есть п. р. ф.

*В. К. Детловс*

**26. К теории конструктивных полных упорядочений. Маркваль д** (Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen. Markwald Werner), Math. Ann. 1954, **127**, № 2, 135—149 (нем.)

Рассматриваются множества и предикаты от натуральных чисел. Для обозначения гёделева числа системы уравнений, определяющей рекурсивную функцию, применяется та же буква, что и для обозначения самой функции. Полным упорядочением (п. у.) называется двуместный предикат $R$, обладающий свойствами:

1. $\forall\, xy\,(x,\ y \in M_R \to xRy \vee yRx)$,

2. $\forall\, xyz\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$,

3. $\forall\, xy\,(xRy \wedge yRx \to x = y)$,

4. в любом непустом подмножестве $N$ множества $M_R$ существует $y$ такой, что ни для какого $x \in N$ не имеют места $x \neq y$ и $xRy$.

Здесь $M_R$ означает поле предиката $R$, определяемое как множество тех $x$, для которых $\exists y\,(xRy \vee yRx)$.

Предикат $R$ называется перечислимым (aufzählbar) или $\exists$-определимым, если существует общерекурсивная функция (о. р. ф.) такая, что

$$xRy \longleftrightarrow \exists z\,(g(x,\ y,\ z) = 0).$$

Предикат $R$ называется $\exists\forall$-определимым, если существует о. р. ф. $g$ такая, что

$$xRy \longleftrightarrow \exists z\,\forall u\,(g(x,\ y,\ z,\ u) = 0).$$

Аналогично определяются $\forall$-определимые, $\forall\exists$-определимые, $\forall\exists\forall$-определимые и т. д. предикаты. Все такие предикаты называются элементарно арифметическими (э. а.). Подобная терминология вводится для множеств; например, множество $M$ называется $\exists$-определимым (или перечислимым), если существует о. р. ф. $g$ такая, что

$$x \in M \longleftrightarrow \exists y\,(g(x,\ y) = 0).$$

Множество $N$ называется э. а. относительно множества $M$, если существует э. а. множество $P$ такое, что $N = M \cap P$.

Порядковые числа (п. ч.), определяемые перечислимыми полными упорядочениями (п. п. у.), называются рекурсивными (р. п. ч.) и составляют основной объект исследования. Множество всех п. п. у. обозначается через $W$, т. е. $f \in W \longleftrightarrow f$ есть о. р. ф. такая, что предикат $\exists z\,(f(x,\ y,\ z)=0)$ является п. у. Представленное через $f$ п. ч. обозначается через $\overline{f}$. Вводится понятие $W$-системы: $[M,\ \Theta]$ называется $W$-системой, если

(1) $M$ является множеством натуральных чисел,

(2) $\Theta$ является частично рекурсивной функцией (ч. р. ф.), определенной в $M$ и такой, что $\Theta(x) \in W$, если $x \in M$,

(3) для каждого р. п. ч. $\alpha$ существует $x \in M$ такой, что $\overline{\Theta(x)} = \alpha$.

$W$-система $[M,\ \Theta]$ называется правильной (ausgezeichnet), если существует ч. р. ф. H, определенная в $W$ и отображающая $W$ в $M$ так, что $\vartheta(x) = \Theta(\mathrm{H}(x))$ является строго монотонной функцией от порядкового числа $\overline{x}$. Показывается, что р. п. ч. совпадают с конструктивными п. ч. Чёрча—Клина (Church A., Bull. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 224—232; Kleene S. C., J. Symbolic Logic, 1938, **3**, 150—155, и др.), определяемыми следующим образом. Рассматриваются все транзитивные предикаты $\leqslant$, обладающие свойствами:

(I) 1 принадлежит полю $\leqslant$,

(II) вместе с $x$ полю $\leqslant$ принадлежит также $2^x$, причем $x \leqslant 2^x$,

(III) для любой о. р. ф. $f$: если $f(n)$ принадлежит полю $\leqslant$ при всех $n$ и функция $f$ строго возрастающая, то $3 \cdot 5^f$ также принадлежит полю $\leqslant$, причем $f(n) < 3 \cdot 5^f$ для всех $n$.

Наименьший из таких предикатов обозначается через $\leqslant_0$ и его поле через $K$. Тогда для каждого $x \in K$ множество тех $y$, для которых $y <_0 x$, вполне упорядочено предикатом $\leqslant_0$. Это п. у., обозначаемое через $R_x$, есть п. п. у. (см. цитированные работы Чёрча и Клина). Через $\Theta_K$ обозначается ч. р. ф. такая, что для $x \in K$ число $\Theta_K(x)$ является гёделевым числом функции, осуществляющей перечисление $R_x$. Построением соответствующей ч. р. ф. H доказывается (теорема 9), что $[K,\ \Theta_K]$ является правильной $W$-системой.

Пусть $[M,\ \Theta]$ является $W$-системой; тогда $x$ и $y$ из $M$ называются изоморфными, если $\overline{\Theta(x)} = \overline{\Theta(y)}$.

Основная теорема работы: Для каждой правильной $W$-системы $[M,\ \Theta]$ изоморфизм относительно $M$ не является э. а.

Следствия из основной теоремы: Предикаты $\overline{\Theta(x)} < \overline{\Theta(y)}$ и $\overline{\Theta(x)} \leqslant \overline{\Theta(y)}$ относительно $M$ также не являются э. а.; тем более предикаты $\overline{\Theta(x)} = \overline{\Theta(y)}$, $\overline{\Theta(x)} < \overline{\Theta(y)}$, $\overline{\Theta(x)} \leqslant \overline{\Theta(y)}$ не являются абсолютно э. а. Далее, изоморфизм не является э. а. уже для таких отрезков из $W$ (или $K$), которые содержат все п. ч. $< \omega^\omega$. Функция $C$, изоморфно отображающая поле одного из двух изоморфных п. п. у. на поле другого, не является, вообще говоря, ч. р. ф., и предикат $C(x) = y$ не является э. а. Не существует такой правильной $W$-системы $[M,\ \Theta]$, в которой $M$ содержало бы для каждого п. ч. только одного представителя.

Для доказательства основной теоремы вводится квантор бесконечности U ($\mathrm{U}x\,P(x)$ означает: для бесконечно многих $x$ имеет место $P(x)$). Доказывается лемма:

для каждого предиката $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\,P(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_t)$, где $P$ о. р. ф. и $Q_i = \exists,\ \forall$, можно построить эквивалентный предикат вида

$$\mathrm{U}y_1 \ldots \mathrm{U}y_m P'(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_t), \qquad (1)$$

где $P'$ также о. р. ф. Отсюда следует, что каждое э. а. множество (а также предикат) можно определить при помощи предиката вида (1). Если обозначать через $\mathrm{U}_n$ класс всех множеств, определяемых при помощи предикатов вида $\mathrm{U}x_1 \ldots \mathrm{U}x_n P(x_1, \ldots, x_n)$ с о. р. ф. $P$, то $\mathrm{U}_1$ совпадает с классом $\forall\exists$-определимых множеств, и для каждого $n$ $\mathrm{U}_n$ является собственным подклассом класса $\mathrm{U}_{n+1}$. *В. К. Детловс*

**27. О функциональной полноте в трехзначном исчислении. Яблонский С. В.**, Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 6, 1153—1155

Рассматриваются функции одного или нескольких переменных, определенные на множестве $E^k = \{0,1,\ldots,k-1\}$ и принимающие значения из $E^k$. Система функций называется (функционально) полной, если всякую функцию можно получить из функций этой системы посредством взятия суперпозиций (т. е. конечного числа подстановок функций в функцию или переменных в функцию). Основной из рассматриваемых задач является проблема нахождения необходимых и достаточных условий полноты для систем функций.

Для случая $k=2$ (функции алгебры логики) полное решение этой проблемы содержится в работах Поста (Post E. L., The two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton — London, 1941) и автора (Матем. сб., 1952, **30(72)**, № 2, 329—348), где одновременно выявляется роль в этих вопросах некоторых замкнутых (относительно взятия суперпозиций) классов функций.

Основным результатом статьи является решение отмеченной выше проблемы для $k=3$ в том смысле, что строится определенная совокупность $P_3$, состоящая из 18 замкнутых классов функций, и утверждается (почти без доказательства) следующая теорема и следствие из нее:

При $k=3$ для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из классов $\in P_3$. При этом во всякой полной системе имеется полная подсистема, мощность которой $\leqslant 18$.

Примечание референта. Определения вышеупомянутых 18 классов станут значительно короче и единообразней, если воспользоваться следующим понятием. Классом сохранения предиката $P(x_1,\ldots,x_n)$ назовем класс всех тех функций $\Phi$, для которых $P(x_{11},\ldots,x_{1n})\,\&\,\ldots\,\&\,P(x_{s1},\ldots,x_{sn}) \to P\,(\Phi\,(x_{11},\ldots,x_{s1}),\ \ldots,\ \Phi\,(x_{1n},\ \ldots,\ x_{sn})$. Очевидно, что всякий класс сохранения замкнут. $P_3$ состоит из классов сохранения для предикатов: $x=i$, $x\neq i$, $x=y+1$, $x+i\leqslant y+i$, $(x=i)\equiv(y=i)$, $x=y\vee x=i\vee y=i$, $x=y\vee x=z\vee y=z$, $x+y=z+t$, где $i=0,1,2$, а сложение берется по mod 3. При $k=2$ аналогичную роль играет совокупность $P_2$ классов сохранения предикатов: $x=0$, $x=1$, $x\neq y$, $x\leqslant y$, $x+y=z+t\,(\mathrm{mod}\,2)$, что следует из вышеуказанных работ Поста и автора.

Нетрудно и для любого $k$, опираясь на полноту системы всех функций двух переменных, доказать существование и, при условии минимальности, единственность такого рода конечной совокупности $P_k$, а также то, что каждый класс $\in P_k$ является классом сохранения некоторого предиката, зависящего от $\leqslant k^2$ переменных. Если при этом будем называть предполной такую систему функций, которая неполна, но становится полной при добавлении к ней любой функции, непредставимой через суперпозиции функций этой системы, то $P_k$ будет совокупностью всех предполных замкнутых классов.

*А. В. Кузнецов*

**28. К определению упорядоченной пары в одноместном ступенчатом исчислении.** Шваб хёйзер (Zur Definition des geordneten Paares im einstelligen Stufenkalkul. Schwabhäuser Wolfram), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 13—14 (нем.)

Рассматриваются множества элементов из некоторой фиксированной области (множества первой ступени), множества таких множеств (множества второй ступени), и т. д. (элементы исходной области считаются множествами нулевой ступени); ступень множества обозначается правым верхним значком. Через $\mathfrak{K}_n$ обозначается оператор образования единичного множества, ступень которого на $n$ выше ступени аргумента; он определяется равенствами

$$\mathfrak{K}_0 A^m = A^m,$$

$$\mathfrak{K}_{n+1} A^m = \{\mathfrak{K}_n A^m\}.$$

Легко убедиться, что имеет место вспомогательное предложение: $\mathfrak{K}_n A_1^{m_1} = \mathfrak{K}_n A_2^{m_2}$ влечет $A_1^{m_1} = A_2^{m_2}$.

Далее определяется упорядоченная пара $[M^i, N^k]$ двух множеств произвольных ступеней как множество

$$\mathfrak{K}_{(2i+1)2^k - \max(i,k) - 1}\{\{\mathfrak{K}_{k\dot{-}i} M^i,\ \mathfrak{K}_{i\dot{-}k} N^k\},\ \{\mathfrak{K}_{k\dot{-}i} M^i\}\},$$

где $m\dot{-}n$ означает 0, если $m\leqslant n$, и $m-n$ в противном случае.

Так как по ступени $(2i+1)\,2^k+1$ этого множества однозначно восстанавливаются ступени множеств пары, то, опираясь на вспомогательное предложение, можно доказать теорему об основном свойстве упорядоченной пары: $[M_1^{i_1}, N_1^{k_1}] = [M_2^{i_2}, N_2^{k_2}]$ тогда и только тогда, когда $M_1^{i_1} = M_2^{i_2}$ и $N_1^{k_1} = N_2^{k_2}$.

В доказательстве предполагается известным, что основным свойством обладает упорядоченная пара двух множеств одинаковой ступени, определяемая через $\{\{A^m, B^m\}, \{A^m\}\}$. *В. К. Детловс*

**29. О критике Гранжо арифметики Пеано.** Кассина (Sulla critica di Grandjot all'aritmetica di Peano. Cassina Ugo), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 4, 442—447 (итал.)

Гранжо в письмах к Ландау изложил свою критику обоснования арифметики Пеано. Эту критику восприняли многие (см., например, Landau E., Grundlagen der Analysis, Leipzig, 1930, p. IX + X; Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, Band 1, Berlin, 1934, 353; Calleja P. Pi, La objeción de Grandjot a la teoria de Peano del numero natural, Mathematicae Notae, Rosario, 1949, 9, 143—151).

Гранжо утверждает, что аксиом Пеано недостаточно для введения суммы двух чисел, а также и для $a\times b$, $\sum_{r=0}^{n} a_r$, $\prod_{r=0}^{n} a_r$; поэтому определение этих символов нужно принимать за новые постулаты. Автор считает, что это утверждение возникло вследствие искажения мысли Пеано.

Пеано определяет сумму двух чисел следующим образом (Peano, Formulaire de mathématiques, II, Torino, 1898, § 2,):

$$a,\ b\varepsilon N_0 .\supset.\ \cdot 1\quad a+0=a$$
$$\cdot 2\quad a+(b+)=(a+b)+,$$

где $N_0$ — число (целое положительное или ноль); $a+$ есть число, следующее за $a$.

·1 и ·2 дают посредством индукции определение суммы $a+b$, но для этого в·2 $a$ и $b$ должны быть числа, удовлетворяющие единственному условию, что $a+b$ есть число.

Автор признает, что это требование формально, не входит в·1 и ·2 и следует только из текста работы Пеано. Поэтому он предлагает для устранения этого недостатка предложение ·2 заменить следующим:

$$\cdot 2'\ a,\ b,\ (a+b)\,\varepsilon N_0 . \supset .\quad a+\operatorname{suc} b=\operatorname{suc}(a+b),$$

где suc $a$ есть число, следующее за $a$. На основе ·1 и ·2′ дается эскиз доказательства существования и единственности суммы двух чисел. Эти же рассуждения и доказательства легко могут быть перенесены на $a\times b$; $\sum_{r=0}^{n} a_r$; $\prod_{r=0}^{n} a_r$.

В заключение автор приводит рассуждения о том, что принцип индукции есть принцип арифметики, а не логики. *Л. Е. Майстров*

30. **Единственные аксиомы для систем $(C, N)$, $(C, O)$ и $(A, N)$ двузначного исчисления высказываний. Мередит** (Single axioms for the systems $(C, N)$, $(C, O)$ $(A, N)$ of the two-valued propositional calculus. Meredith Carew A.), J. Computing Systems, 1953, **1**, 155—164 (англ.)

Автор рассматривает три формы двузначного исчисления высказываний, в которых примитивными являются импликация и отрицание, импликация и логическая константа $O$, дизъюнкция и отрицание соответственно. Принимая в каждом случае подстановку и modus ponens в качестве примитивных правил вывода, он показывает, что формулы

$$CCCCpqCNrNsrtCCtpCsp,\ CCCCCpqCrOstCCtpCrp,$$
$$ANANANpqArAstANANspArAtp$$

могут быть выбраны в качестве единственных аксиом этих систем соответственно. Автор устанавливает без доказательства другую аксиому из 19 букв для $(C, O)$-системы и две другие аксиомы из 24 букв для $(A, N)$-системы. Он высказывает предположение, что его аксиомы для $(C, N)$- и $(C, O)$-систем наиболее краткие среди возможных, и доказывает, что единственная аксиома для $(A, N)$-системы должна содержать не менее пяти $N$.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 1. *A. Rose*

31. **Единственная аксиома позитивистской логики. Мередит** (A single axiom of positive logic. Meredith Carew A.), J. Computing Systems, 1953, **1**, 169—170 (англ.)

Автор выводит аксиомы Лукасевича $CpCqp$, $CCpCqrCCpqCpr$ из единственной аксиомы $CCCpqrCsCCqCrtCqt$. Он ставит вопрос, является ли она кратчайшей аксиомой системы, но не обсуждает его обстоятельно. *A. Rose*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 1.

32 К. **Гильбертово пространство и интуиционизм. Хейтинг** (Espace de Hilbert et intuitionnisme. Heyting A. Les méthodes formelles en axiomatique. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, Paris, 1950, pp. 59—60; discussion, p. 64, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Первая часть этой лекции содержит общие соображения об отношениях между интуиционизмом и формализмом. Подчеркивается, что, несмотря на общеизвестные отличия этих двух направлений, они на самом деле имеют много общего. Согласно автору, метаматематическая основа, на которой Гильберт намеревается построить свое формальное здание, приблизительно совпадает с интуиционистской теорией чисел. Но если Гильберт для дальнейшего развития математики допускает чисто формальные высказывания, то интуиционист, хотя и соглашается с предварительным использованием формальных методов как удобного средства, требует, чтобы он всегда мог истолковать теорию в целом с интуиционистской точки зрения.

Во второй части своей лекции автор дает интуиционистскую интерпретацию разных понятий и результатов классической математики. Он подчеркивает важность понятия различия в интуиционизме ($a$ отлично (distant) от $b$, если можно найти рациональный промежуток, отделяющий $a$ от $b$). Показывается, что если дискриминант квадратичной формы двух переменных положителен, то значение формы отлично от нуля, коль скоро хотя бы один из аргументов отличен от нуля. Переходя к гильбертову пространству, автор обсуждает интуиционистскую интерпретацию понятия линейной независимости. Дальше он указывает, что хотя вполне непрерывная (completely continuous) квадратичная форма всегда имеет максимум, может оказаться невозможным определить точку, в которой максимум достигается. Тем не менее дано условие, при котором определение такой точки становится возможным. *A. Robinson*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 91.

33 К. **Решение проблемы разрешимости для некоторых формул исчисления предикатов. Исман** (Une méthode de décision pour certaines formules du calcul des prédicats. Issmann S. Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 35—38. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Éditions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (франц.)

Решение проблемы разрешимости для одноместного исчисления предикатов (ср. Behmann H., Math. Ann., 1922, **86**, 163—229). *G. Kreisel*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 90.

34 К. **О связях между дедуктивным исчислением и семантической интерпретацией аксиоматической системы. Робинсон** (Les rapports entre le calcul déductif et l'interprétation sémantique d'un système axiomatique. Robinson Abraham. Les méthodes formelles en axiomatique. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, 1950, pp. 35—51; discussion, pp. 51—52. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Автор на большом числе хорошо подобранных примеров излагает свой метод (см. On the meta-

mathematics of algebra, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951) извлечения алгебраических теорем из теоремы полноты элементарного исчисления предикатов. *P. Lorenzen*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 190.

**35 К. Система модальной логики. Лукасевич** (A system of modal logic. Łukasiewicz Jan. Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 82—87, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (англ.)

Сокращенный вариант другой статьи, опубликованной автором под тем же заглавием (J. Computing Systems, 1953, **1**, 111—149).

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 189.

---

**См. также:** 115; 136, 137, 387 **РЕЦ**, 457, 459, 460, 461.

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**36. Распределение по простому модулю простых чисел с заданным значением символа Лежандра. Виноградов И. М.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 2, 105—112

Пусть $s$ — одно из чисел 1, —1; $p^{(s)}$ пробегает простые числа с условием $\left(\frac{p^{(s)}}{q}\right) = s$; $2 < q_0 \leqslant q < N$, $q_0$ — достаточно большое постоянное; $N$ — независимое переменное; $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; $\pi_{s,\sigma}(N)$ — число тех $p^{(s)} \leqslant N$, наименьшие неотрицательные вычеты которых по модулю $q$ меньше $\sigma q$. Автор показывает элементарным методом, что

$$\pi_{s,\sigma}(N) - \sigma\pi_{s,1}(N) \ll N^{1+\varepsilon} F_0,$$

где

$$F_0 = \sqrt{q^{-1} + qN^{-1}} + N^{-1/6}.$$

Этот же метод был применен автором и для оценки некоторых тригонометрических сумм, содержащих характеры и величины $p^{(s)}$.

*Н. Г. Чудаков*

**37. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Родосский К. А.,** Матем. сб., 1954, **34 (76)**, № 2, 331—356

Работа содержит две теоремы о нулях $L$-рядов, из которых следует теорема о том, что наименьшее простое число $P_{\min}(l, D)$ в прогрессии $nD + l$, $(l, D) = 1$, имеет оценку $P_{\min}(l, D) < D^{A_1}$ (в дальнейшем $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — абсолютные положительные константы).

Теорема 1. Пусть $\psi \in [2; 0{,}1 \ln D]$ и $Q(D, \psi)$ — число $L$-функций с характерами по модулю $D$, имеющих каждая хоть один нуль в прямоугольнике:

$$1 - \psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1; \quad |t| \leqslant e^{\psi} \ln^{-1} D \qquad (s = \sigma + it).$$

Тогда $Q(D, \psi) < e^{A_1 \psi}$.

Средства доказательства: лемма о нулях $L(s, \chi)$ в кругах с центрами на $\sigma = 1$; теорема Гадамара о трех кругах; решето Винго Бруна в форме А. Сельберга; использование ядра типа гауссовой вероятностной плотности в интеграле Меллина.

Теорема 2. Пусть по модулю $D$ существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ (т. е. реальный нуль $\tilde{\beta}$ под условием $\tilde{\beta} > 1 - c \ln^{-1} D$, $c$ — некоторая константа). Если $\rho = \beta + i\tau \neq \tilde{\beta}$ — нуль какой-либо $L$-функции с характером по модулю $D$, с условием

$$(1 - \tilde{\beta}) \ln D (|\tau| + 1) \leqslant A_3,$$

то

$$\beta \leqslant 1 - A_2 (\ln D (|\tau| + 1))^{-1} \ln \frac{eA_3}{(1 - \tilde{\beta}) \ln D (|\tau + 1|)}.$$

Средства доказательства те же, что и в теореме 1.

Значение этой работы для теории простых чисел состоит во введении новых глубоких приемов, позволяющих сравнительно кратко решить трудный вопрос об оценке $P_{\min}(l, D)$. Эти приемы могут с успехом применяться и в других проблемах.

Опечатки: на стр. 345, строки 3, 7, 17 снизу, $\ln \ln D$ нужно заменить на $\psi_1 = \max(\ln \ln D, \psi_0)$.

*Ю. В. Линник*

**38. Неограниченность сумматорной функции одного обобщенного характера. Бронштейн Б. С.,** Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 212—220

На полугруппе натуральных чисел рассматривается обобщенный характер, т. е. вполне мультипликативная функция, принимающая значения, равные по модулю нулю или единице.

Доказывается, что сумматорная функция обобщенного характера неограничена, если он отличается от некоторого неглавного характера Дирихле только на кратных конечного числа простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и не совпадает ни с каким неглавным характером Дирихле.

Доказательство вполне элементарно и основано в случае $s = 1$ на использовании $p$-ичной системы счисления. Общий случай сводится к этому с помощью приема, принадлежащего Н. Г. Чудакову и Ю. В. Линнику (Докл. АН СССР, 1950, **74**, № 2, 193—196).

Строится пример обобщенного характера, отличающегося от характера Дирихле на бесконечном редком множестве простых чисел и обладающего неограниченной сумматорной функцией.

*Б. М. Бредихин*

**39. Коэффициенты сингулярных эллиптических функций. Карлиц** (The coefficients of singular elliptic functions. Carlitz Leonard), Math. Ann., 1954, **127**, № 2, 162—169 (англ.)

Статья содержит ряд сравнений, которым удовлетворяют коэффициенты разложения эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn} x$ в степенной ряд в

окрестности начала координат. Рассматриваются лишь эллиптические функции, допускающие комплексное умножение. Типичным результатом является следующий. Пусть модуль эллиптической функции

$$\operatorname{sn} x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \frac{x^m}{m!}$$

принадлежит к мнимому квадратичному полю с дискриминантом $d$. Если $(d/p) = -1$ ($p$ — нечетное простое число), то

$$\alpha_p \equiv 0 \pmod{p}.$$

*И. И. Пятецкий-Шапиро*

**40. Поведение кратных тэта-рядов для квадратичных форм от нечетного числа переменных при модулярных подстановках. Пфетцер** (Die Wirkung der Modulsubstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl. Pfetzer Werner), Arch. Math., 1953, 4, № 5—6, 448—454 (нем.)

Пусть $\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} m_i m_k = m'\mathfrak{A}m$ — положительно определенная квадратичная форма от $n$ переменных с целыми коэффициентами. Известно, что тэта-ряд

$$\vartheta(\tau) = \sum_{m_1,\ldots,\,m_n} \exp\left\{\pi i \tau \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} m_i m_k\right\} \qquad (1)$$

есть целая модулярная форма размерности $-n/2$, принадлежащая к группе $\Gamma(M)$ с системой мультипликаторов $v$, т. е. для любой модулярной подстановки $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(M)$

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = v(A)(c\tau+d)^{\frac{n}{2}}\vartheta(\tau), \qquad (2)$$

где $v(A_1A_2) = v(A_1)\,v(A_2)$. ($\Gamma(M)$ — подгруппа модулярной группы, состоящая из матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых справедливы сравнения $a \equiv d \equiv 1\,(M)$, $b \equiv c \equiv 0\,(M)$). $M$ принято называть ступенью (Stufe) группы $\Gamma(M)$.

В статье выводятся формулы преобразований для функций

$$\vartheta(\tau; h, \mathfrak{A}, P_k) = \sum_{m \equiv h\,(N)} P_k(m) \exp\left(\pi i \tau \frac{m'\mathfrak{A}m}{N^2}\right), \qquad (3)$$

где $P_k(m) = P_k(m_1, \ldots, m_n)$ — шаровая функция, соответствующая квадратичной форме с матрицей $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, т. е. однородный многочлен $k$-й степени, удовлетворяющий уравнению

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(x_1, \ldots, x_n) = 0. \qquad (4)$$

Эти формулы заключаются в следующем: для любой модулярной подстановки $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2N)$

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; h, \mathfrak{A}, P_k\right) = (c\tau+d)^{r+k}\vartheta(\tau; h, \mathfrak{A}, P_k) \quad \text{для } n = 2r;$$

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; h, \mathfrak{A}, P_k\right) = \left(\frac{c}{d}\right)_* (c\tau+d)^{r+k+\frac{1}{2}}\vartheta(\tau; h, \mathfrak{A}, P_k) \quad \text{для } n = 2r+1,$$

где $\left(\frac{a}{b}\right)_* = \left(\frac{a}{|b|}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}}$, $\left(\frac{0}{1}\right)_* = 1$. Если же для матрицы $\mathfrak{A}$ выполнено условие $\frac{g'\mathfrak{A}g}{N} \equiv 0\ (2)$ для всех $g$ таких, что $\mathfrak{A}g \equiv 0\,(N)$, то функции $\vartheta$ принадлежат к $\Gamma(N)$. Для четного числа переменных эти результаты были получены Шёнебергом (Schoeneberg B., Math. Ann., 1939, 116, 511—523).

*И. И. Пятецкий-Шапиро*

**41. О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся числовыми свойствами. II. Фолькман** (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. II. Volkmann Bodo), Math. Z., 1953, 59, № 3, 247—254 (нем.)

Продолжение серии статей (РЖМат, 1954, 2547). Пусть $\mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $\mu(0) = 0$, есть непрерывная неубывающая функция; обобщенной мерой Хаусдорфа точечного множества $M$ называется число

$$\mu\{M\} = \lim_{\eta \to 0+} \inf_{M \subset \bigvee V_i,\ |V_i| \leqslant \eta} \left(\sum_i \mu(|V_i|)\right),$$

где $V_i$ — выпуклые области, а $|V_i|$ — их диаметры. Пусть имеется класс $F$ функций $\mu^{(\alpha)}(t)$, $-\infty \leqslant \underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha} \leqslant +\infty$, зависящих от параметра $\alpha$, причем

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\mu^{(\alpha_2)}(t)}{\mu^{(\alpha_1)}(t)} = 0, \quad \text{если } \alpha_1 < \alpha_2;$$

найдется такое число $\delta$, $\underline{\alpha} \leqslant \delta \leqslant \bar{\alpha}$, что

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > \delta, \\ \infty, & \text{если } \alpha < \delta, \end{cases}$$

тогда $\delta = \dim_F M$ называется хаусдорфовой размерностью множества $M$ относительно класса $F$. Если $F = \{\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < r\}$, то $\dim_F M = \dim M$ называется дробной размерностью множества $M$.

Рассматриваются хаусдорфовы размерности множеств вещественных чисел $\rho$, $0 < \rho \leqslant 1$ (записанных в $g$-адической системе) с заданными частотами вхождения в них цифр. Получены следующие результаты:

(I). Пусть цифры $0, 1, \ldots, g-1$ ($g \geqslant 2$) разбиты на $m$ попарно не пересекающихся множеств $\mathfrak{S}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$), $w_\mu$ — число элементов множества $\mathfrak{S}_\mu$. Пусть даны неотрицательные числа $\zeta_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$), $\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu = 1$. Рассмотрим множество $G = G(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ вещественных чисел

$$\rho = \sum_{j=1}^{\infty} e_j g^{-j} \quad (e_j \text{ — целое, } 0 \leqslant e_i < g, \text{ бесконечно много } e_j \neq 0),$$

для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_\mu(\rho, n)}{n} = \zeta_\mu,$$

$$A_\mu(\rho, n) = \sum_{\substack{i \leqslant n \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}} 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда

$$\dim G = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu \log \frac{\zeta_\mu}{w_\mu}}{\log g^{-1}}.$$

Это есть обобщение результата Эглстона (Eggleston H. G., Quart. J. Math., 1949, **20**, 31—36), где рассмотрен случай $m = g$.

(II). Пусть $E = E\{\beta_1, \ldots, \beta_{g-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{g-1}\}$, $0 < \beta_j < 1$, $\zeta_j > 0$, — множество вещественных чисел $\rho$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_j(\rho, n)}{n^{\beta_j}} = \zeta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, g-1),$$

а $K$ — класс функций $x^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log g}{-\log t}\right)^{\left(\frac{-\log t}{\log g}\right)^{\alpha}}$.

Тогда

$$\dim_K E = \max_i \beta_i.$$

(III). В случае $g = 2$ (II) несколько усилено.

*А. В. Малышев*

**42. О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся числовыми свойствами. III. Фолькман** (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III. Volkmann Bodo), Math. Z., 1953, **59**, № 3, 259—270 (нем.)

Продолжение серии статей (РЖМат, 1954, 2547; 1955, 41). Пусть $F = (f_1, f_2, \ldots, f_i)$, $0 \leqslant f_i < g$, $g \geqslant 2$, — заданная последовательность $i$ чисел. Обозначим через $K(F, g)$ множество всех вещественных чисел $\rho$, $0 < \rho \leqslant 1$, в $g$-адическом разложении которых $\rho = \sum_{j=1}^{\infty} e_j g^{-j}$ ($e_j$ — целые, $0 \leqslant e_j < g$, бесконечно много $e_j \neq 0$) не встречается последовательности $F$. Доказано, что

$$\dim K(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}$$

(определение дробной размерности, $\dim K(F, g)$, см. реф. 41), где $\gamma(F, g)$ есть наибольший вещественный корень уравнения

$$z^i - g z^{i-1} + \sum_{s=1}^{c} z^{p_s} - g \sum_{s=1}^{c} z^{p_s - 1} + 1 = 0;$$

$\{p_1, p_2, \ldots, p_c\}$ есть множество (быть может пустое) натуральных чисел, обладающих тем свойством, что первые $p_s$ ($s = 1, 2, \ldots, c$) чисел последовательности $F$ равны ее последним $p_s$ числам. Получен ряд других результатов о размерностях $K(F, g)$ и сходных с ним множеств.

Попутно выведена следующая оценка: пусть $\mathfrak{N}(F, g)$ — множество неотрицательных целых чисел, в $g$-адическом разложении которых не встречается последовательности $F$; обозначим $K(x)$ количество $k \in \mathfrak{N}(F, g)$, для которых $k \leqslant x$; тогда

$$\beta_1 x^{\frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^{\nu} < K(x) < \beta_2 x^{\frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^{\nu},$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ — постоянные; $\nu$ — натуральное число, не зависящее от $x$, для которого указан способ вычисления.

*А. В. Малышев*

**43. Метрическая теорема о множествах целых чисел. Вирзинг** (Ein metrischer Satz über Menger ganzer Zahlen. Wirsing Eduard), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 392—398 (нем.)

Согласно Остману множество целых неотрицательных чисел $\mathfrak{C}$ называется примитивным (также неприводимым), если его нельзя представить в виде $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, в котором оба слагаемых имеют по меньшей мере два элемента; сумма понимается в арифметическом смысле, т. е. $\mathfrak{C}$ должно состоять из всех элементов $c$, представимых в виде $c = a + b$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. Автор называет множество неотрицательных целых чисел вполне неприводимым, если оно само неприводимо и если присоединение к нему или изъятие из него любого конечного множества не делает его приводимым. Каждому множеству целых неотрицательных чисел $\mathfrak{A}$ сопоставляется точка отрезка [0, 2] следующим образом:

$$\mathfrak{A} \to \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}, \quad \text{где} \quad e_i = \begin{cases} 1, & i \in \mathfrak{A}, \\ 0, & i \notin \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Доказываются теоремы, что почти все множества целых чисел в смысле лебеговой меры на отрезке [0, 2] неприводимы и даже вполне неприводимы.

Доказательство опирается на известную теорему о том, что почти все числа нормальны по Борелю; эта теорема доказывается в работе в виде первых двух лемм.

*А. Г. Постников*

**44. О приближении комплексных чисел числами мнимых квадратичных полей, не имеющих неглавных идеалов, в частности обладающих алгоритмом Евклида. Пуату** (Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques dénués d'idéaux non principaux particulièrement lorsque vaut l'algorithme d'Euclide. Poitou Georges), Ann. scient. École norm. supér., 1953, сер. 3 **70**, № 3, 199—265 (франц.)

Пусть $R(\sqrt{-D})$ — мнимое квадратичное поле с дискриминантом $D$. Для всякого комплексного $x \notin R(\sqrt{-D})$ пусть $C(x)$ означает $\limsup$ выражения $|q(qx - p)|^{-1}$ по всем целым $p$, $q$ ($q \neq 0$) из $R(\sqrt{-D})$. Множество всех $C(x)$ называется спектром Маркова, а его нижняя грань $C_D$ — константой Гурвица поля $R(\sqrt{-D})$.

Из одной теоремы Хофрейтера (Hofreiter N., Monatsh. Math. Phys., 1935, **42**, 401—416) следует, что для полей $R(\sqrt{-D})$ с числом классов идеалов 1 константа Гурвица $C_D \leqslant \sqrt{|\Delta_D|}$, где $\Delta_D$ — наименьший по модулю относительный дискриминант среди дискриминантов относительных квадратичных полей над $R(\sqrt{-D})$. Для $D = 3, 4, 7, 8$ константы Гурвица равны соответственно $\sqrt[4]{13}$ (Перрон), $\sqrt{3}$ (Форд), $\sqrt[4]{8}$ (Хофрейтер), $\sqrt{2}$ (Перрон) и совпадают с $\sqrt{|\Delta_D|}$.

Автор в предыдущей заметке, написанной совместно с Декомбом (Descombes R., Poitou G., C.r. Acad. sci., 1950, **231**, № 4, 264—266), указал пример поля, для которого константа Гурвица $< \sqrt{|\Delta_D|}$, именно: $C_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{5} < \sqrt[4]{5} = \sqrt{|\Delta_{11}|}$. $C_{11}$ является изолированной точкой спектра Маркова, все остальные его точки больше 1,19.

В другой заметке тех же авторов (C. r. Acad. sci., 1951, **232**, № 4, 292—294) указано, что

$$\sqrt[4]{13},\ 2,\ \sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}}$$

являются изолированными точками спектра Маркова для $R(\sqrt{-3})$. Другие точки этого спектра $> 2{,}070068$, а точка

$$\sqrt{\frac{28+16\sqrt{3}}{13}}$$

является его предельной точкой.

В реферируемой статье дается подробное доказательство результатов, изложенных в обеих заметках; кроме того, доказывается, что $C_{19} = 1$, $C_{43} < \sqrt{5/11}$. Здесь также $C_D < \sqrt{|\Delta_D|}$. Методом доказательства является некоторое распространение алгоритма непрерывных дробей на квадратичную область. Отмечается, что метод применим также для изучения спектра Маркова в других квадратичных полях, не имеющих главных идеалов. *И. П. Кубилюс*

**45. Неприводимые выпуклые тела. Оллершоу** (Irreducible convex bodies. Ollerenshaw Kathleen), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 16, 293—302 (англ.)

Пусть дано лучевое тело $S$ с центром в начале координат. Критическим определителем $\Delta(S)$ тела $S$ называется нижняя граница определителей решеток, ни одна из точек которых, кроме начала, не содержится в $S$. Лучевое тело $S$ называется неприводимым, если критический определитель любого лучевого тела, содержащегося в $S$, но отличного от него, меньше критического определителя тела $S$.

Доказаны следующие две теоремы:

1) Обобщенный цилиндр $f(x_1, x_2) \leqslant 1, |x_3| \leqslant 1, \ldots, |x_n| \leqslant 1$, где $f(x_1, x_2) \leqslant 1$ есть неприводимая выпуклая область, неприводим.

2) $n$-мерная сфера, где $n \leqslant 5$, неприводима.

*А. В. Малышев*

**46. Квадратичное поле и теория уравнения Пелля. Рédеи** (Quadratische Zahlkörper und Theorie der Pellschen Gleichung. Rédei Ladislaus), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 187 (нем.).

Дается краткое изложение исследований автора по вопросу о разрешимости уравнения $x^2 - dm^2y^2 = -1$ (РЖМат, 1954, 3610). *В. Д. Подсыпанин*

**47. Наименьшие решения диофантовых уравнений. Хольцер** (Minimallösungen diophantischer Gleichungen. Holzer Ludwig), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 188 (нем.)

Указывается, что вопрос о возможно более точной верхней границе наименьшего значения $z$ при решении уравнения $ax^2 + by^2 = cz^2$ в целых числах связан с теоремой, утверждающей, что в каждом, взаимно простом с модулем, классе вычетов по идеальному модулю лежит бесконечно много простых главных идеалов первого порядка. Используя эту теорему, автор (Canad. J. Math., 1950, **2**, 238—244) доказал, что $|z| < \sqrt{ab}$, если $ab > 1$.

*В. Д. Подсыпанин*

**48. О специальном классе диофантовых уравнений второй степени. Нагелль** (On a special class of Diophantine equations of the second degree. Nagell Trygve), Arkiv mat., 1954, **3**, № 1, 51—65 (англ.)

Число $X_1 + Y_1\sqrt{D}$ называется основным решением уравнения

$$X^2 - DY^2 = 1, \tag{1}$$

если $X_1$, $Y_1$ суть наименьшие целые положительные числа, удовлетворяющие (1).

Если $U_1$, $V_1$ — наименьшие целые положительные числа, удовлетворяющие уравнению

$$U^2 - DV^2 = 4, \tag{2}$$

то основным решением (2) называется число $\frac{1}{2}(U_1 + V_1\sqrt{D})$.

Дается доказательство, опирающееся на элементарные методы (без применения теории идеалов), следующей теоремы:

Теорема (у автора теорема 3). Часть 1. Пусть $D$ — данное целое, свободное от квадратов число $> 1$ и пусть $E$ — одно из четырех чисел: $\pm 1, \pm 2$. Далее, пусть $A$ и $B$ — целые положительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$AB = D,$$
$$1 < A < B \quad \text{при } E = +1,$$
$$1 \leqslant A < B \quad \text{при } E = \pm 2 \text{ или } = -1,$$

причем, если $E = \pm 2$, то $AB = D$ будет нечетным.

Тогда среди диофантовых уравнений

$$Ax^2 - By^2 = E, \tag{3}$$

удовлетворяющих перечисленным требованиям, именно одно разрешимо в целых числах $x$ и $y$. При этом, если $x = \xi$ и $y = \eta$ суть наименьшее положительное решение в целых числах уравнения (3), то число

$$\frac{1}{|E|}(\xi\sqrt{A} + \eta\sqrt{B})^2 = \frac{A\xi^2 + B\eta^2}{|E|} + \frac{2\xi\eta}{|E|}\sqrt{D}$$

является основным решением уравнения (1).

Часть 2. Пусть $D$ — данное целое, свободное от квадратов число $> 1$ такое, что уравнение (2)

разрешимо в нечетных целых числах $U$ и $V$. Далее, пусть $A$ и $B$ — положительные целые числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$AB = D$$

и

$$1 \leqslant A < B.$$

Тогда среди диофантовых уравнений

$$Ax^2 - By^2 = \pm 4, \tag{4}$$

удовлетворяющих поставленным условиям, именно одно, кроме уравнения

$$x^2 - Dy^2 = 4, \tag{5}$$

разрешимо в нечетных целых числах $x$ и $y$.

Если $x = \xi$ и $y = \eta$ — наименьшее положительное решение уравнения (4) в нечетных числах, то

$$\frac{1}{4}(\xi\sqrt{A} + \eta\sqrt{B})^2 = \frac{1}{4}(A\xi^2 + B\eta^2) + \frac{1}{2}\xi\eta\sqrt{D}$$

является основным решением уравнения (5).

Приводятся примеры, иллюстрирующие теорему. Библиография, 9 названий. *И. Г. Мельников*

**49. Об уточнении теоремы Т. Нагелля, касающейся диофантова уравнения $Ax^3 + By^3 = C$. Юнггрен** (On an improvement of a theorem of T. Nagell concerning the Diophantine equation $Ax^3 + By^3 = C$. Ljunggren Wilhelm), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 297—309 (англ.)

В известной работе Т. Нагелля (Nagell T., J. math. pures et appl., 1925, **9**, № 4, 209—270) устанавливается теорема: неопределенное уравнение $Ax^3 + By^3 = C$, где $C = 1$ или $C = 3$, причем, если $C = 1$, то $A$ и $B$ больше единицы, если $C = 3$, то $AB$ не делится на три, имеет не более одного решения в целых рациональных $x$ и $y$. Если $x = x_1$, $y = y_1$ есть решение уравнения, то $\varepsilon = C^{-1}(x_1A^{1/3} + y_1B^{1/3})^3 = \varepsilon_0^{2^r}$, где $\varepsilon_0$ — основная единица поля $K[(AB^2)^{1/3}]$ (имеется единственное исключение $2x^3 + y^3 = 3$).

Хотя Нагелль не установил верхнюю границу для $r$, он указал алгоритм, посредством которого можно найти решение или убедиться в его несуществовании.

В реферируемой работе уточняется результат Нагелля. Именно доказывается, что $r = 0$ или $r = 1$. *Д. К. Фаддеев*

**50. Заметки о диофантовом уравнении $y^2 - k = x^3$. Хемер** (Notes on the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$. Hemer Ove), Arkiv mat., 1954, **3**, № 1, 67—77 (англ.)

Приводятся некоторые уточнения и дополнения к диссертации автора: «On the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$» (Uppsala, 1952). Доказательства существенным образом опираются на результаты некоторых исследований Б. Н. Делоне и Т. Нагелля.

Конкретным результатом работы является таблица решений рассматриваемого уравнения для всех $-100 \leqslant k \leqslant 100$. *И. Г. Мельников*

**51. Заметки об уравнениях Диофанта. Глоден** (Notes on Diophantine equations. Gloden A.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 207—209 (англ.)

1) Решение системы

$$x + y + z = u + v + w \tag{1}$$

$$xyz = uvw \tag{2}$$

$$x^4 + y^4 = u^4 + v^4. \tag{3}$$

Эйлер дал решение уравнения (3); решив (1) и (2) относительно $w$ и $z$, получим:

$$w = \frac{(u + v - x - y)\,xy}{uv - xy}, \qquad z = \frac{(u + v - x - y)\,uv}{uv - xy}.$$

2) Решения уравнений Диофанта при помощи двух параметров.

Примеры:

$$x^3 + y^3 + 2z^3 = u^3 + v^3 + 2w^3 \tag{1}$$

$$x^3 + y^3 + 2z^3 = t^3 \tag{2}$$

$$x^3 + y^3 + 2z^3 = u^3 + 3v^3. \tag{3}$$

Решения:

$$(4m^3 - n^3)^3 + (5m^2n)^3 + 2(n^3)^3 = (4m^3 + n^3)^3 + (3m^2n)^3 + 2(m^2n)^3 \tag{1'}$$

$$(3m^3 - 4n^3)^3 + (6m^2n)^3 + 2(4n^3)^3 = (3m^3 + 4n^3)^3 \tag{2'}$$

$$(16m^3 - n^3)^3 + (12m^2n)^3 + 2(n^3)^3 = (16m^3 + n^3)^3 + 3(4m^2n)^3 \tag{3'}$$

с целыми $m$, $n$. *В. А. Голубев*

**52. Диофантовы системы типа $\sum_{i=1}^{p} a_i^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n, n+2, n+4, \ldots, n+2r)$. Палама** (Diophantine systems of the type $\sum_{i=1}^{p} a_i^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n, n+2, n+4, \ldots, n+2r)$. Palamà G.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 132—134 (англ.)

Приводится обобщение некоторых результатов, относящихся к проблеме Тарри, именно доказывается теорема:

Если $a_i$, $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — решение системы

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n, n+2, n+4, \ldots, n+2r),$$

то для любого $l$ имеем

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i - l)^k + \sum_{i=1}^{p} (b_i + l)^k = \sum_{i=1}^{p} (a_i + l)^k + \sum_{i=1}^{p} (b_i - l)^k$$

$(k = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+3, \ldots, n+2r+1)$.

Приводится три числовых примера. *Г. В. Емельянов*

**53. Задача Диофанта. Мёснер** (A Diophantine problem. Moessner Alfred). Riveon lematematika, 1953, **6**, 26—27 (древнеевр.)

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 8, 725.

54. **Коэффициенты Ферма. Пиза** (Fermat coefficients. Piza P. A.), Math. Mag., 1954, 27, № 3, 141—146 (англ.)

Пусть $n$ и $c \leqslant n$ — целые рациональные положительные числа. Вводится в рассмотрение символ $(n : c)$, определяемый следующими соотношениями:

$$(n:1) = (n:n) = 1, \quad (n : c < 1) = (n : c > n) = 0,$$
$$(n:c) = (n-1 : c-1)\frac{2n-c}{c} = \frac{1}{c}\binom{2n-c}{c-1}.$$

Символ $(n : c)$ автор называет «коэффициентом Ферма», так как он входит в выражение для малой теоремы Ферма:

$$x^p - x = p\sum_{c=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2} : c\right)\sum_{a=1}^{x-1}(a^2+a)^c.$$

Показаны некоторые свойства коэффициента Ферма, непосредственно вытекающие из его определения. *П. Н. Ремеров*

55. **Специальное сравнение. Карлиц** (A special congruence. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 933—936 (англ.)

Доказываются два сравнения:

$$p + (p-1)\sum_{0<s(p-1)<m}\binom{m}{s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^{r+1}}, \quad (1)$$

где $p^r \mid m$, $p \geqslant 3$, $\binom{m}{n}$ — число сочетаний $C_m^n$. Для $r = 0$ формула (1) дана Эрмитом.

$$p^{-r-1}\left\{p + (p-1)\sum_{0<s(p-1)<m}\binom{m}{s(p-1)}\right\} \equiv$$
$$\equiv m_0\left\{\frac{1}{2} - \sum_{0<2s<m,\ p-1\nmid 2s}\binom{m-1}{2s-1}\frac{B_{2s}}{2s} + \right.$$
$$\left. + \delta_m\frac{w_p}{p-1}\right\} \pmod{p}, \quad (2)$$

где $m = p^r m_0$, $p > 3$; $B_m$ — числитель $m$-го числа Бернулли; $\delta_m = 1$, если $p - 1 \mid m - 1$; $\delta_m = 0$ в других случаях; $w_p$ — частное $[(p-1)! + 1]/p$. *В. А. Голубев*

56. **Новая задача о трехчленных сравнениях в целых рациональных числах. Пирсон, Вандивер** (On a new problem concerning trinomial congruences involving rational integers. Pearson Erna H., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 12, 1278—1285 (англ.)

Рассматривается сравнение $1 + ax^c \equiv by^m \pmod{p}$ при условии, что $ab \not\equiv 0 \pmod{p}$, а $m$ и $c$ — делители $p - 1$. Если $g$ — первообразный корень, то сравнение запишется в виде

$$1 + g^i x^c \equiv g^j y^m \pmod{p}.$$

Пусть $(i, j)_{cm}$ — число решений этого сравнения. Работа посвящена изучению этой числовой функции. Основным результатом является формула

$$\sum_{v=0}^{l-1}(r + c_1 v, k)_{cm} = (r, k)_{c_1 m},$$

где $c_1 l = c$.

Эта формула вытекает из доказанной в работе теоремы об уравнении $c_1 x_j^{m_1} + \cdots + c_j x_j^{m_j} = c$ в конечном поле порядка $p^n$. *В. Д. Подсыпанин*

57. **О применении функции $\lambda_g(n)$ к исследованию периодических дробей и китайского сравнения $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$. Якобчик** (Les applications de la fonction $\lambda_g(n)$ à l'étude des fractions périodiques et de la congruence chinoise $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$. Jakóbczyk Franciszek), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951 (1952), A5, 97—138 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Работа состоит из введения и трех глав. В главе 1 излагаются известные свойства числовой функции $\lambda_g(m)$, представляющей длину периода при разложении несократимой дроби $l/m$ в систематическую дробь с основанием системы счисления $g$. В главе 2 изучается вопрос о том, когда указанное разложение обладает свойством $D$. Это свойство состоит в справедливости соотношений

$$c_i + c_{a+i} = g - 1; \quad r_i + r_{a+i} = m; \quad i = 1, 2, \ldots, a,$$

где $2a$ — длина периода, $c_i$ — $i$-я цифра периода, $r_i$ — соответствующий остаток. Доказано, что если свойство $D$ имеет место при данных $g$ и $m$, то оно сохраняется при замене $g$ на $\bar{g}$, где $g\bar{g} \equiv 1 \pmod{m}$. В случае же нечетных $g$ и $m$ свойство сохраняется при замене $m$ на $2m$ или $m^\alpha$, где $\alpha$ — любое натуральное число. Доказывается, что свойство $D$ имеет место, когда $g$ — первообразный корень $m$. Дается также необходимый и достаточный признак наличия свойства $D$ в случае, когда $m$ — наименьшее кратное чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Этот признак требует, чтобы свойство $D$ имело место для каждой пары $g$ и $m_i$ и чтобы все $\lambda_g(m_i)$ точно делились бы на одну и ту же степень двух.

В третьей главе изучается вопрос о числах, удовлетворяющих сравнению $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$. Доказывается известная теорема о том, что числа Мерсенна $(2^p - 1)$ и Ферма $(2^{2^k} + 1)$ удовлетворяют этому сравнению. О числах Ферма доказывается и обратная теорема, а именно: если число $n = 2^m + 1$ удовлетворяет сравнению $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$, то $m = 2^k$. Далее доказывается, что этому сравнению могут удовлетворять только числа вида

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

или

$$2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

где $p_i$ — нечетные простые числа и показатели удовлетворяют неравенствам $\alpha_i \leqslant v_i$, где $v_i$ — наибольшее значение $t_i$ такое, что имеет место сравнение $2^{\lambda_2(p_i)} - 1 \equiv 0 \pmod{p_i^{t_i}}$. Кроме того, $n - 1 \equiv$

$\equiv 0 \pmod{\lambda_2(p_1p_2\cdots p_k)}$ и для четного $n$ $k \geqslant 2$. Отсюда как следствие получается, что показатели при простых числах в каноническом разложении чисел Мерсенна и Ферма так же должны удовлетворять неравенствам $\alpha_i \leqslant v_i$. Учитывая, что случай $v_i > 1$ встречается редко, автор выдвигает гипотезу, что числа Мерсенна и Ферма — бесквадратные числа. *В. Д. Подсыпанин*

58. **Заметка о формуле Сийя.** **Карлиц** (Note on a formula of Szily. Carlitz L.), Scripta math., 1952, 18, 249—253 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Употребляя формулу Куммера из теории гипергеометрических рядов (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, Cambridge, 1935, 9), автор оценивает сумму ряда

$$\sum_{r+s=k} (-1)^r \binom{a}{r}\binom{b}{s}$$

для произвольных $a$ и $b$. Его результат содержит как частный случай следующую формулу, данную Сийем (Szily K., Math. Nat. Ber. Ungarn, 1895, 12, 84—91)

$$\sum_{r=-b}^{b} (-1)^r \binom{2a}{a-r}\binom{2b}{b-r} = \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} \Big/ \binom{a+b}{a}, a \geqslant b.$$

*A. L. Whiteman*

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 7, 642.

59. **Числа, выражающие гипотенузу.** **Смит** (Hypotenuse numbers. Smith N. H.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 37—38 (англ.)

Пусть целое число $n$ выражает гипотенузу двух различных прямоугольных треугольников с целочисленными катетами, т. е. $n^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, и пусть $(a, b) = 1$, $(c, d) = 1$.

Доказывается элементарная теорема:

$$n^2 = a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)(p^2 + m^2),$$

где $(x, y) = 1$, $(m, p) = 1$. *В. А. Голубев*

60. **Свойство пифагоровых чисел.** **Мёснер** (A property of Pythagorean numbers. Moessner Alfred), Riveon lematematika, 1953, 6, 27 (древнеевр.)

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 8, 724.

61. **Точное определение $10^m$-й цифры в написанном последовательно ряде натуральных чисел.** **Улер** (Exact location of the $10^m$th digit in the consecutively written sequence of the natura numbers 1, 2, 3, 4, ... Uhler Horace S.), Scripta math., 1953, 19, № 2—3, 201—204 (англ.)

Эта проблема была поставлена и решена Барбье (Barbier E., C. r. Acad. sci., 1887, 105, 795—798, 1238, 1239).

Решение автора проще; он делит натуральные числа на группы по числу цифр в них. Число всех цифр в $k$-й группе $9 \cdot 10^{k-1}k$, всего цифр во всех $k$ группах $9\sum_1^k 10^{n-1}n$. Так как $\sum_1^k 10^{n-1}n = 1 + 2\cdot 10 + \cdots + k\,10^{k-1}$, то

$$9\sum_1^k 10^{n-1}n = k\,10^k - (10^k - 1)/9.$$

Пусть $x$ — число, принадлежащее $k$-й группе чисел в котором находится искомая $10^c$-я цифра. Тогда

$$x - 1 = \left[\frac{10^c - 9\sum_1^{k-1} 10^{n-1}n}{k}\right] + 9(k-1),$$

где $\left[\frac{m}{k}\right]$ — целая часть частного. Остаток $r > 0$ от деления определяет $r$-ю цифру числа $x$, стоящую на $10^c$ месте от начала натурального ряда.

Если $r = 0$, то искомая цифра является последней в числе $x - 1$. *В. А. Голубев*

62. **Условие для того, чтобы $C_n^k$ содержало множителем простое число $p$.** **Русу** (Condiția ca $C_n^k$ să fie multiplu de numărul prim $p$. Rusu Eugen), Gaz. mat. și fiz., 1954, 6, № 1, 30—33 (рум.)

Формулируется и доказывается теорема: пусть $n$ и $k$ — два числа, записанные в основании исчисления $p$ (где $p$—простое). Тогда $C_n^k$ не содержит множителем $p$, если каждая цифра числа $k$ не превосходит цифру того же разряда числа $n$. В противном случае $C_n^k$ содержит число $p$ множителем. $C_n^k$ содержит множителем $p^\alpha$, если производя вычитание $n - k$, «занимаем» $\alpha$ раз у высшего разряда.

В качестве приложения данной теоремы рассматривается следующее:

1. Доказывается теорема: коэффициенты разложения $(a+b)^n$ тогда и только тогда не содержат множителем $p$, когда $n = p^s - 1$. Данная теорема является обобщением теоремы: все коэффициенты $(a+b)^n$ нечетны тогда и только тогда, когда $n$ имеет вид $2^k - 1$ (Виноградов И. М., Основы теории чисел, гл. 1, задача 12).

2. При $n = p^r$ $C_n^k$ не содержит множителем $p$ только для двух значений $k$, а именно: $k = 0$ и $k = n$. Получено соотношение $k!\,(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod p$.

3. При $n = 2p^r$, кроме крайних членов, не содержат множителем $p$ только те коэффициенты $C_n^k$, у которых $k = p^r$.

Данный вопрос может рассматриваться не только для коэффициентов двучлена, но и для коэффициентов многочлена. *В. М. Остиану*

63. **Об одной задаче разбиения чисел.** **Попович** (Asupra unei probleme de partiție a numerelor. Popoviciu Tiberiu), Studii și cercetări științ., 1953, 4, № 1—2, 7—58 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается задача о числе разбиений целых чисел на целые неотрицательные слагаемые, выраженная неопределенным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = n$$

(так называемая задача о партициях).

Вместо обычно применяемого со времен Эйлера аналитического метода, основанного на применении производящей функции

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-z^{a_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} N_m(n)\, z^n,$$

автор предпочитает действовать элементарными арифметическими средствами, изучая различные частные случаи задачи приближенного определения $N_m(n)$ с помощью надлежащим образом выбранных полиномов $P(n)$. Числа $a_k$ всегда предполагаются попарно взаимно простыми. Наиболее подробно разобраны случаи $m = 2, 3$. *А. И. Попов*

**64. Об одном правиле Ферма для разложения чисел на множители и о его вопросе относительно всех собственных делителей числа. Палама** (Su di una regola di Fermat per la fattorizzazione dei numeri e su di una sua questione relativa alle parti aliquote. Palama Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 4, 414—422 (итал.)

В письме к Мерсенну и Френиклю Ферма излагает один из своих методов разложения больших чисел на множители. Пусть $N$ — данное число, $[\sqrt{N}] = r$, отсюда $N = r^2 + d$, $d \leqslant 2r$.

Прибавляем к числу $2r + 1 - d$ последовательно числа $2r + 3$, $2r + 5$, ..., $2r + 2n - 1$, ... до тех пор, пока не получим квадрата $q^2$, тогда $N = (n+r+q) \times (n + r - q)$.

Однако способ Ферма практически неприменим в случае большой разности между множителями данного числа или если число $N$ простое.

Автор распространяет способ Ферма на случай любого составного числа. *В. А. Голубев*

**65. О применении алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Попович** (Asupra aplicării algoritmului lui Euclid pentru aflarea c. m. m. d. c. a doua numere. Popoviciu Tiberiu), Studii şi cercetări ştiinţ., 1953, **4**, № 1—2, 59—62 (рум.; резюме русс., франц.)

Доказывается теорема: Пусть $a$, $b$, $l$ — натуральные числа, $b > a$ и $k$ — число цифр числа $a$ в системе счисления с основанием $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^l\right]$. Тогда при нахождении $(a, b)$ с помощью алгоритма Евклида число делений не больше $lk$. *А. А. Конюшков*

**66. Заметка об обращенных числах. Перес** (A note on the reversion of numbers. Peres N. J. C.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 38—39 (англ.)

Дано $n$-значное число $N = 10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + a_1$ и обращенное число $N_1 = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \cdots + a_n$. Без строгого доказательства дается формула

$$N - N_1 = (10^{n-1} - 1)(a_n - a_1) + (10^{n-2} - 10)(a_{n-1} - a_2) + (10^{n-3} - 10^2)(a_{n-2} - a_3) + \cdots$$

Доказаны частные случаи формулы при $n = 2, 3, 4, 5$. *В. А. Голубев*

**67. Замечание по поводу магического квадрата в 9 клеток. Кале** (A note on magic squares of 9 cells. Kale M. N.), Math. Student, 1953, **21**, № 3—4, 107—108 (англ.)

Доказывается, что из любых девяти положительных целых чисел, образующих арифметическую прогрессию, возможно образовать только 8 различных магических квадратов в 9 клеток. Показано также, что при этом центральную и угловые клетки такого квадрата могут занимать только числа вида $a + (2k + 1)d$. *Б. А. Кордемский*

**68. Теоремы Золотарёва. Крянгэ, Опайц** (Teoremele lui Zolotariov cu privire la resturile patratice. Creangă I., Opaiţ Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 12, 539—550 (рум.)

После краткого жизнеописания Е. И. Золотарёва и выдержки из списка его работ дается разбор известного доказательства квадратичного закона взаимности, предложенного Золотарёвым.

Ссылки на книги Б. Н. Делоне «Петербургская школа теории чисел» и И. М. Виноградова «Основы теории чисел», а также на работу Золотарёва. *Б. Н. Делоне*

**69. Простые числа. I, II, III. Хорват** (Prime numbers. I, II, III. Horváth J.), Revista Mat. Elem., 1952, **1**, 21—33, 70—78; 1953, **2**, 21—37 (исп.)

Популярная статья.

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 8, 726.

**70. Вопросы арифметики. Тебо** (Questions d'arithmétique. Thébault Victor), Mathesis, 1953, **62**, 14—20 ((франц.)

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 8, 724.

**71. Опечатки** (Errata), Acta sci. sinica, 1953, **2**, № 2 (англ.)

Список опечаток к работе Хуа Ло-гэна «О числе решений задачи Тарри» (РЖМат, 1953, 550).

**72 К. Счет и число. Берман Г. Н.**, перев. на кирг. М. Галиевой, 44 стр., Киргизгосиздат, Фрунзе, 1953 (библ.)

**73 К. Арифметика. Погребысский И. Б.** (учебник для учительских ин-тов УССР), 284 стр., Рад. школа, Киев, 1953, 6 р. 65 к. (укр.) (библ.)

**74 РЕЦ. Три жемчужины теории чисел. Хинчин** (Three pearls of number theory. Khinchin A. Y., translated from the 2-nd revised russian ed. (1948), Graylock Press, Rochester, N. Y., 1952, 2,00 doll.) [**Рецензия: Селберг** (Selberg Sigmund), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 314—316 (англ.)]

**75 РЕЦ. О квадратичном законе взаимности в теле кубичных корней из единицы. Брандт** (Über das quadratische Reziprozitätsgesetz im Körper der dritten Einheitswurzeln. Brandt H., S. 26, J. A. Barth, Leipzig, 1952) [**Рецензии: Кнёдель** (Knödel W.), Internat. math. Nachr.,

1953, 7, № 27/28, 30; **Хофрейтер** (Hofreiter N.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 2, 174—175 (нем.)]

76 Д. **Аддитивные свойства некоторых последовательностей чисел. Субханкулов М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1953

77 Д. **Оценки числовых функций, связанных с некоторыми задачами в теории мнимых квадратичных полей. Заикина Н. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1953

78 Д. **О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов. Шидловский А. Б.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1953

79 Д. **О неопределенном уравнении $x^3+y^3+Az^3=3Bxyz$. Баулин В. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1953

См. также: 88, 99, 105, 167 Д

## АЛГЕБРА

80. **О развитии алгебры, в особенности об отечественных алгебраических исследованиях. Фукс** (Az algebra fejlödéséröl, különös tekintettel a hazai algebrai kutatásokra. Fuchs László), A magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, 3, № 3, 381—402 (венг.)

Доклад, посвященный в основном истории развития алгебраических исследований и современному состоянию алгебры в Венгрии. Особое внимание уделено послевоенному периоду. Указывается на необходимость расширения связи с зарубежными математиками и прежде всего с математиками СССР и стран народной демократии.

81. **О родственных преобладаниях и структуре сообществ животных. III. Условия структуры с весом. Ландау** (On dominance relations and the structure of animal societies: III. The condition for a score structure. Landau H. G.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 2, 143—148 (англ.)

Для сообщества с родственным преобладанием структура с весом определяется как система $n$ целых чисел $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, в которой $v_i$ означает вес $i$-го члена, т. е. число членов, над которыми преобладает $i$-й член (см. часть I реферируемой статьи: Bull. Math. Biophys., 1951, 13, 1—19).

Доказана теорема: $n$ неотрицательных целых чисел $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ тогда и только тогда образуют структуру с весом, когда

$$\sum_{s=1}^{k} v_{i_s} \geqslant \frac{k(k-1)}{2} \text{ и } \sum_{i=0}^{n-1} v_i = \frac{n(n-1)}{2};$$

здесь $\sum_{s=1}^{k} v_{i_s}$ означает сумму любых $k$ чисел из $v_i$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$.

Кроме того, показано, что если наибольшим весом $v_i$ обладает $i$-й член, то для каждого $j \neq i$ либо $i$-й член преобладает над $j$-м, либо существует такое $k$, что $i$-й член преобладает над $k$-м, а $k$-й над $j$-м. *Л. Е. Садовский*

### МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

82. **Уравнения в многочленах. Рамин** (Equations in polynomials Rumney Max), Math. Gaz., 1953, 37, № 322, 261—264 (англ.)

Рассматривается уравнение $AU+BV=P$, где $A$, $B$ и $P$ — данные многочлены, а $U$ и $V$ — искомые. Основной результат следующий: пусть $(U_1, V_1)$; $(U_2, V_2), \ldots, (U_{n+1}, V_{n+1})$ — $n+1$ решение вышеуказанного уравнения и пусть $H_1(U,V), \ldots, H_{n+1}(U,V)$ — $n+1$ форма $n$-й степени от двух переменных; тогда определитель $|H_i(U_j, V_j)| \equiv 0 \pmod{P^{0,5n(n+1)}}$. *В. Д. Подсыпанин*

83. **Нули самоинверсных многочленов. Анкочеа** (Zeros of self-inversive polynomials. Ancochea Germán), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 900—902 (англ.)

Пусть $g(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ и $[g(z)]^* = z^m \overline{g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$.

Если $g(z)=c\,[g(z)]^*$, $|c|=1$, то многочлен $g(z)$ называется самоинверсным. Множество его нулей и множество инверсных им точек относительно окружности $|z|=1$, очевидно, совпадают.

Заметка посвящена новому, сравнительно простому доказательству следующей теоремы Кона (Cohn A., Math. Z., 1922, 14, 110—148): самоинверсный многочлен $g(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ и многочлен $c\,[g'(z)]^* \equiv \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)\, b_k z^k$ имеют внутри единичного круга $|z|<1$ одинаковое число нулей. *М. Б. Балк*

84. **Об одном матричном уравнении. Голубчиков А. Ф.**, Уч. зап. Сталингр. гос. пед. ин-та, 1953, № 3, 71—82

Исследуется матричное уравнение

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} A^{m-k} X B^k = 0,$$

где $A$ и $B$ — заданные квадратные матрицы порядков $n$ и $n'$, имеющие соответственно элементарные делители $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$, $(\lambda-\lambda_j')^{p_j'}$, $i=1,\ldots,s$, $j=1,\ldots,s'$, $\sum_1^s p_i = n$, $\sum_1^{s'} p_i' = n'$; $X$ — искомая прямоугольная $n \times n'$-матрица; $\binom{m}{k}$ — число сочетаний из $m$ по $k$.

Устанавливается, что число $r$ линейно независимых решений этого матричного уравнения определяется по формуле

$$r = m \sum_{(\lambda_i = \lambda'_j)} d_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(\lambda_i = \lambda'_j) \\ f_{ij} \leqslant m_i}} E\left[\frac{1}{2}(m - f_{ij})^2\right],$$

где $d_{ij} = \min(p_i, p'_j)$, $f_{ij} = |p_i - p'_j|$, а $E[x]$ — целая часть числа $x$. *Ф. Р. Гантмахер*

85. **О границах для наибольшего собственного значения матрицы с положительными элементами. Медлин** (On bounds for the greatest characteristic root of a matrix with positive elements. Medlin Gene W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 769—771 (англ.)

Дан новый способ оценки границ для наибольшего собственного значения матрицы с положительными элементами, улучшающий результаты Брауэра (Brauer A., Duke Math. J., 1952, 19, 553—563). Способ основан на оценке Островского компонент собственного вектора (Osrowsky A., J. London Math. Soc., 1952, 27, 253—256). *Н. В. Азбелев*

86. **О составлении уравнений частот колебаний сложных механических систем. Медель В. Б.**, Тр. Томского электромехан. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1953, 18, 126—142

Излагается прием составления уравнения частот

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} P_{11} \ldots P_{1n} \\ P_{n1} \ldots P_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

колебаний механических систем, где

$$P_{kj} = a_{kj2}\lambda^2 + a_{kj1}\lambda + a_{kj0} \quad (k, j = 1, \ldots, n).$$

Автор формулирует правило, по которому вычисление коэффициента при $\lambda^{2n-p}$ ($p = 0,1, \ldots, 2n$) уравнения $D(\lambda) = 0$ сводится к составлению суммы произведений таких элементов $a_{kjs}$ ($s = 0, 1, 2$; $k, j = 1, \ldots, n$) определителя $D(\lambda)$, у которых сумма третьих индексов равна $2n - p$. *А. М. Летов*

87. **О лемме Стилтьеса для матриц. Эгервари** (On a lemma of Stieltjes on matrices. Egervary E.), Acta scient. math., 1954, 15, № 2, 99—103 (англ.)

Известна теорема, обобщающая лемму Стилтьеса (Stieltjes T. J., Acta math., 1886, 9, 385—400): Если в матрице $A = \| a_{ik} \|_1^n$

1) $a_{ik} < 0$; $i, k = 1, \ldots, n$; $i \neq k$, 2) все главные миноры положительны, то все элементы обратной матрицы положительны.

Дается новое доказательство этой теоремы и доказывается, что требование 1) можно ослабить, заменив его требованиями:

а) $a_{ik} \leqslant 0$; $i, k = 1, \ldots, n$; $i \neq k$;

б) в каждой горизонтали (вертикали) имеется хотя бы один отрицательный элемент, лежащий под (над) главной диагональю.

Заметим, что возможно ослабить и требование 2), заменив его требованием положительности последовательных главных миноров

$$a_{11}, A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \ldots A\begin{pmatrix} 1, \ldots, & n \\ 1, \ldots, & n \end{pmatrix}$$

)см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, ГТТИ, М., 1953, 338). *Д. М. Котелянский*

88. **Характеристика квадратичных форм над локальными полями. О'Мира** (Characterization of quadratic forms over local fields. O'Meara O. T.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 9, 969—972 (англ.)

Пусть $F$ — полное дискретно нормированное поле характеристики $\neq 2$ с конечным полем классов вычетов. Рассматриваются инварианты квадратичных форм с целыми коэффициентами из $F$ относительно целых унимодулярных линейных преобразований. Система таких инвариантов называется полной, если совпадение всех инвариантов у двух форм является необходимым и достаточным условием того, что целым унимодулярным линейным преобразованием можно одну из них перевести в другую. Указываются полные системы инвариантов квадратичных форм относительно указанных преобразований в случаях, когда число 2 либо не делится на простой элемент поля $F$, либо делится только на первую его степень. Определение этих инвариантов довольно сложно, особенно во втором случае. Все результаты приводятся без доказательств. *В. Б. Демьянов*

89 **РЕЦ. Линейная алгебра. Гельфанд** (перевод со 2-го русск. изд.) (Lineární algebra. Gelfand I. M., z druhého vydání přeložil M. Fiedler, 232 str., Nakladatelství Československé akademié věd, Praha, 1953, 22 Kčs.) [**Рецензия**: **Вильгельм** (Vilhelm Václav), Časop. pěstcv. mat., 1954, 79, № 1, 87—88 (чеш.)]

## ГРУППЫ

90. **Структурные изоморфизмы разрешимых $R$-групп. Плоткин Б. И.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 6, 1141—1144

Доказывается, что для $R^*$-группы (т. е. для $R$-группы, все фактор-группы которой по инвариантным изолированным подгруппам также $R$-группы) разрешимость является структурным свойством. Попутно устанавливается ряд групповых свойств, сохраняющихся при структурных изоморфизмах. Отметим следующие результаты: при структурном изоморфизме: 1) инвариантная, коммутативная изолированная подгруппа $R$-группы отображается на такую же подгруппу; 2) возрастающий инвариантный разрешимый ряд, все факторы которого $R$-группы, отображается на такой же ряд; 3) $R^*$-группа с возрастающим инвариантным разрешимым рядом отображается на группу с таким же свойством; при этом инвариантная изолированная подгруппа отображается на такую же подгруппу, а изолятор коммутанта отображается на соответствующий изолятор коммутанта. *П. Г. Конторович*

91. **О некоторых связях между группой и ее автоморфизмами. Калужнин** (Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen. Kaloujnine Leo), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 164—172 (нем.)

Пусть $\Gamma$ — группа автоморфизмов группы $G$; совокупность $Z(G, \Gamma)$ всех элементов $G$, которые инвариантны относительно любого автоморфизма

из Γ, называется Γ-центром группы $G$; подгруппа $K(G, \Gamma)$, порожденная всеми элементами вида $a^{\alpha}a^{-1}$, где $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, называется Γ-коммутантом $G$. Устанавливается, что для всякой группы автоморфизмов Γ группы $G$ Γ-коммутант является нормальным делителем $G$.

Для двух произвольных групп автоморфизмов Γ и Γ′ группы $G$ доказывается лемма: любые два из трех следующих условий влекут третье: 1) $K(G, \Gamma) \subseteq Z(G, \Gamma')$, 2) $K(G, \Gamma') \subseteq Z(G, \Gamma)$, 3) каждый элемент Γ перестановочен с каждым элементом Γ′.

Пусть $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = 1$ — конечная цепочка подгрупп группы $G$. Совокупность всех автоморфизмов $G$, которые для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$ оставляют инвариантными все правосторонние смежные классы $G_i$ по $G_{i+1}$, называется стабильной группой данной цепочки подгрупп. Опираясь на лемму, автор доказывает, что стабильная группа инвариантного ряда длины $m$ группы $G$ нильпотентна, причем класс нильпотентности ее не превосходит числа $m-1$. Стабильная группа произвольной конечной цепочки подгрупп длины $m$ группы $G$ $k$-ступенно разрешима и $k \leqslant m-1$.

Пусть $\hat{G}$ — группа всех внутренних автоморфизмов группы $G$. Формулами $K_0(G, \Gamma) = G$, $K_i(G, \Gamma) = K(K_{i-1}(G, \hat{G}), \Gamma)$ определяются подгруппы $G$, называемые автором высшими Γ-коммутантами $G$. Вопрос об инвариантности в $G$ подгруппы $K_i(G, \Gamma)$ для $i > 1$ и произвольной группы автоморфизмов Γ остается открытым. Группа $G$ называется Γ-нильпотентной, если $K_m(G, \Gamma) = 1$ для некоторого $m$. Доказывается, что если группа $G$ Γ-нильпотентна и все высшие Γ-коммутанты $K_i(G, \Gamma)$ инвариантны в $G$, то подгруппа $K_1(G, \Gamma)$ обладает центральным рядом $K_1(G, \Gamma) \supset K_2(G, \Gamma) \supset \ldots \supset K_m(G, \Gamma) = 1$.

Обобщается следующим образом известная теорема Холла: для любых $j = 0, 1, \ldots, m$ и $i = 1, 2, \ldots, m$ каждый элемент $(i-1)$-го коммутанта $K_{i-1}(\Gamma, \hat{\Gamma})$ стабильной группы Γ инвариантного ряда $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = 1$ группы $G$ индуцирует тождественный автоморфизм в фактор-группе $G_j / G_{j+i}$.

*Д. М. Смирнов*

**92. Об одном специальном виде двойственности в теории групп. II. Фукс** (On a special kind of duality in group theory. II. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 3—4, 299—314 (англ.; резюме русс.)

Обобщаются для случая абелевых групп произвольной мощности результаты, полученные для счетных абелевых групп в работе Фукса, Кертеса и Селе под тем же названием (РЖМат, 1954, 4358).

Абелевы группы $G$ и $H$ называются двойственными между собой, если всякая подгруппа и всякая фактор-группа группы $G$ (группы $H$) изоморфны соответственно некоторой фактор-группе и некоторой подгруппе группы $H$ (группы $G$). Подмножество $S$ элементов абелевой группы $G$ называется независимым, если для всякого конечного подмножества $a_1, \ldots, a_k$ множества $S$ из соотношения $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = 0$, где $n_i$ — целые рациональные числа, следует $n_1a_1 = \ldots = n_ka_k = 0$. Мощность максимального независимого в $G$ множества называется рангом группы и обозначается $R(G)$. Ранг фактор-группы группы $G$ по максимальной периодической подгруппе называется свободным рангом группы. Ранг $p_i$-примарной компоненты группы $G$ называется ее $p_i$-рангом и обозначается $R_{p_i}(G)$. Если $p$ — простое число, то символом $R_{p^\infty}(G)$ обозначается $\min\limits_{k=0,\,1,\,2,\,\ldots} R_p(p^kG)$. Если $G_i$ — $p_i$-примарная компонента группы $G$, то наименьшее целое неотрицательное число $l$, для которого $R(p_i^l G_i) = R_{p_i^\infty}(G_i)$, обозначается символом $l(G_i)$, $p$-примарная группа $G$ называется регулярной, если $R(G) = R_{p^\infty}(G)$. Будем говорить, что абелева $p$-группа $G$ обладает свойством $A_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — некоторое кардинальное число, если ее можно гомоморфно отобразить на группу $A = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k$ — $p$-примарная группа ранга $\mathfrak{p}$, разложимая в прямую сумму циклических подгрупп порядка $p^k$.

Дается следующее описание класса двойственных себе абелевых групп произвольной мощности. Среди абелевых групп без кручения таких групп нет. Абелева $p$-группа $G$, у которой $R(G) = \mathfrak{q}$ и $R_{p^\infty}(G) = \mathfrak{p}$, двойственна себе тогда и только тогда, когда существует прямое разложение вида $G = G_1 + G_2 + G_3$, где $G_1$ — ограниченная группа ранга $\mathfrak{q}$ при $\mathfrak{q} > \mathfrak{p}$ и нулевая группа при $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, $G_2$ — полная примарная группа ранга $\mathfrak{p}$, $G_3$ — регулярная и редуцированная $p$-группа мощности $\mathfrak{p}$, первый ульмовский фактор которой обладает свойством $A_\mathfrak{p}$. Смешанная группа $G$, имеющая конечный свободный ранг, двойственна себе тогда и только тогда, когда она разлагается в прямую сумму свободной абелевой группы и периодической группы, каждая примарная компонента которой является неограниченной двойственной себе группой. Смешанная группа $G$ бесконечно свободного ранга $\mathfrak{r}$, у которой $R_{p_i}(G) = \mathfrak{q}_i$ и $R_{p_i^\infty}(G) = \mathfrak{p}_i$, двойственна себе тогда и только тогда, когда существует прямое разложение вида $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5$, где $G_1$ — свободная абелева группа ранга $\mathfrak{r}$, $G_2$ — периодическая группа, всякая $p_i$-примарная компонента которой при $\mathfrak{q}_i > \mathfrak{p}_i$ ограничена и имеет $p_i$-ранг, равный $\mathfrak{q}_i$, а при $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ есть нулевая группа; $G_3$ — полная абелева группа без кручения ранга $\mathfrak{r}$; $G_4$ — полная периодическая группа, ранг каждой примарной компоненты которой $\geqslant \mathfrak{r}$; $G_5$ — периодическая или смешанная группа, у которой свободный ранг $\leqslant \mathfrak{r}$ и всякая $p_i$ — примарная компонента при $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{r}$ имеет ранг $\leqslant \mathfrak{r}$, а при $\mathfrak{p}_i > \mathfrak{r}$ является регулярной и редуцированной группой мощности $\mathfrak{p}_i$, первый ульмовский фактор которой обладает свойством $A_{\mathfrak{p}_i}$.

Абелевы группы $G$ и $H$ двойственны между собой тогда и только тогда, когда они двойственны самим себе, имеют равные свободные ранги и их $p_i$-примарные компоненты $G_i$ и $H_i$ для всякого простого $p_i$ удовлетворяют условиям: $l(G_i) = l(H_i)$, $R(p^kG_i) = R(p^kH_i)$ при $k \leqslant l(G_i)$.

Дается также полное описание класса пар абелевых групп, одна из которых $S$ — $F$-двойственна другой.

*Л. Я. Куликов*

93. **О несчетных абелевых $p$-группах.** Селе (On non-countable abelian $p$-groups. Szele T.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 300—301 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается максимальная периодическая подгруппа полной прямой суммы счетной последовательности циклических групп, порядки которых возрастают и равны соответственно $p, p^2, p^3, \ldots$ ($p$— простое число). Группа $G$ является абелевой $p$-группой без элементов бесконечной высоты и имеет мощность континуума. Известно, что группа $G$ неразложима в прямую сумму циклических подгрупп (Куликов Л. Я., Матем. сб., 1941, 9, 165—182). Дается новое простое доказательство неразложимости $G$ в прямую сумму циклических подгрупп.

Примечание референта. Простой пример абелевой $p$-группы континуальной мощности без элементов бесконечной высоты, неразложимой в прямую сумму циклических подгрупп, впервые был дан А. Г. Курошем (Матем. сб., 1939, 5, 347—354). Легко убедиться в том, что группа $G$ изоморфна группе, построенной А. Г. Курошем. *Л. Я. Куликов*

94. **О прямой сумме циклических групп с одной объединенной подгруппой.** Селе (On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup. Szele T.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 302—307 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Исследуется строение абелевой группы $G$, заданной системой $\{a_\nu\}_{\nu \in M}$ (произвольной мощности) образующих элементов и определяющими соотношениями

$$m_\nu a_\nu = m_k a_k \text{ для любых } \nu, k \in M \qquad (1)$$

($m_\nu$ — заданные целые рациональные отличные от нуля числа).

Получены следующие результаты. Группа $G$ может быть представлена в виде прямой суммы $A + B$, где $A$ — счетная группа, а $B$ — прямая сумма конечных циклических групп. Максимальная периодическая подгруппа $T$ группы $G$ является прямой суммой циклических подгрупп, фактор-группа $G/T$ есть группа без кручения первого ранга. Подгруппа $T$ тогда и только тогда является прямым слагаемым группы $G$, когда множество положительных степеней $p$, делящих хотя бы одно из чисел $m_\nu$, $\nu \in M$, конечно для всякого простого $p$. Группа $G$ тогда и только тогда является группой без кручения, когда любые два числа $m_\nu, m_k$ ($\nu \neq k$, $\nu, k \in M$) взаимно простые. Группа $G$ разложима в прямую сумму циклических подгрупп тогда и только тогда, когда среди чисел $m_\nu$, $\nu \in M$, есть только конечное число различных.

Рассматривается также абелева группа $H$, заданная образующими элементами $a_\nu$, $\nu \in M$, удовлетворяющими соотношениям (1) и соотношению $m(m_\nu a_\nu) = 0$, где $m$ — целое положительное число. Доказывается, что группа $H$ разложима в прямую сумму циклических подгрупп тогда и только тогда, когда множество положительных степеней $p$, делящих хотя бы одно из чисел $m_\nu$, $\nu \in M$, конечно для всякого простого делителя $p$ числа $m$. *Л. Я. Куликов*

95. **О теореме Гашютца.** Икеда (On a theorem of Gaschütz. Ikeda Masatoshi), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 53—58 (англ.)

Ассоциативная алгебра $A$ с единицей над коммутативным кольцом $R$ с единицей, обладающая конечным линейно независимым $R$-базисом, называется алгеброй Фробениуса, если правое и левое регулярные представления алгебры $A$, соответствующие некоторому $R$-базису, эквивалентны.

$R$-базис $\{v_i\}$ алгебры Фробениуса $A$ называется дуальным $R$-базису $\{u_i\}$, если правое регулярное представление алгебры $A$, соответствующее базису $\{v_i\}$, совпадает с левым регулярным представлением, соответствующим базису $\{u_i\}$.

Пусть $A$ — алгебра Фробениуса над кольцом $R$, $P$ — некоторое кольцо, в центре которого лежит $R$, и $\mathfrak{m}$ есть $A$ — $P$-модуль. Если для всякого $A$ — $P$-модуля $\mathfrak{n}$, содержащего такой $A$ — $P$-подмодуль $\mathfrak{n}'$, что $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}' \cong \mathfrak{m}$ (или $\mathfrak{n}' \cong \mathfrak{m}$), из существования прямого разложения $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}' + \mathfrak{m}'$, где $\mathfrak{m}'$ есть $P$-подмодуль, следует существование прямого разложения $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}' + \mathfrak{m}''$, где $\mathfrak{m}''$ есть $A$ — $P$-подмодуль, то $\mathfrak{m}$ называется $M_0$-модулем ($M_u$-модулем). В работе находятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $A$ — $P$-модуль $\mathfrak{m}$ являлся $M_u$-или $M_0$-модулем. При этом предполагается, что алгебра $A$ обладает $R$-базисом, содержащим единицу алгебры $A$. Получается следующий результат.

Если $A$ — $P$-модуль $\mathfrak{m}$ является $M_u$-или $M_0$-модулем, то существует такой $P$-эндоморфизм $\beta$ модуля $\mathfrak{m}$, что для любого $R$-базиса $\{u_i\}$ алгебры $A$ и дуального ему $R$-базиса $\{v_i\}$ $\Sigma_i u_i \beta v_i$ есть тождественный автоморфизм модуля $\mathfrak{m}$. Обратно, если $P$-эндоморфизм $\beta$ с указанным свойством существует, то $\mathfrak{m}$ является как $M_u$-, так и $M_0$-модулем.

Этот результат является обобщением аналогичного критерия, полученного Гашютцем для $G$ — $\Omega$-модулей, где $G$ — конечная группа, а $\Omega$ — произвольная область $G$-эндоморфизмов (Gaschütz W., Math. Z., 1952, 56, 376—387). *А. П. Мишина*

96. **О разложении П-отделимых групп в произведение подгрупп.** Чунихин С. А., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 4, 725—727

Для ранее введенных автором так называемых П-отделимых групп (РЖМат, 1954, 1569) показывается возможность разложения в произведение своих подгрупп; П — некоторое множество простых чисел. Делитель $m$ числа $g$ называется наибольшим П-силовским, если все простые делители числа $m$ принадлежат П, $(m, g/m) = 1$ и $g/m$ не делится на простые числа из П.

Доказывается теорема: пусть $m$ — наибольший П-силовский делитель порядка $g$ П-отделимой группы $\mathfrak{G}$. Тогда всякому представлению $m$ в виде произведения двух взаимно простых множителей $m = m_1 m_2$ соответствует представление группы $\mathfrak{G}$ в виде произведения $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — некоторые подгруппы $\mathfrak{G}$, для которых числа $m_1$ и $m_2$ соответственно являются наибольшими П-силовскими делителями их порядков.

Из этого результата следует теорема: если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые делители $m$, то группу $\mathfrak{G}$ можно представить в виде произведения $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k$, где $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$ — некоторые подгруппы $\mathfrak{G}$, имеющие наи-

большими П-силовскими делителями своих порядков соответственно числа $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$.

*П. А. Гольберг*

**97. Фокальные ряды конечных групп. Хигман** (Focal series in finite groups. Higman D. G.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 477—497 (англ.)

Пусть $S$ является подгруппой конечной группы $G$. Фокальным рядом подгруппы $S$ в $G$ называется множество подгрупп ${}_iS$, определяемое следующим образом: ${}_0S = S$, ${}_{i+1}S$ есть подгруппа группы $G$, порожденная совокупностью всех коммутаторов $c = [s, g]$, где $c$ и $s$ принадлежат ${}_iS$, $g$ принадлежит $G$. Такие ряды для нормальных делителей группы $G$ ранее рассматривались Бером (Baer R., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, 295—347).

Если ${}_kS = 1$ при некотором $k$, то $S$ называется гиперфокальной подгруппой группы $G$. При $k = 1$ $S$ называется фокальной подгруппой группы $G$. Очевидно, что фокальная подгруппа является абелевой, а гиперфокальная — специальной. Через $P(\pi)$, где $\pi$ — некоторое множество простых чисел, обозначается подгруппа группы $G$, порожденная всеми элементами $G$, порядки которых не делятся на простые числа из $\pi$. В работе изучается структура группы $G$ в зависимости от свойств фокального ряда подгруппы $S$. Доказывается теорема:

Если $\pi$ содержит все простые делители индекса $[S : {}_kS]$ для некоторого $k$, то каждый простой делитель индекса $[P(\pi) \cap S : P(\pi) \cap {}_kS]$ является делителем индекса

$$[P(\pi) : P(\pi) \cap S].$$

Из этой теоремы и ряда лемм следует теорема:

Если $S$ является $P$-подгруппой группы $G$ (автор называет подгруппу $P$-подгруппой, если ее порядок взаимно прост с индексом) и $\pi$ состоит из всех простых делителей порядка $S$, то эквивалентны следующие условия:

1) $S$ — гиперфокальная подгруппа группы $G$;

2) $S$ — специальная группа и $P(\pi) \cap S = 1$;

3) $S$ — специальная группа и $P(\pi)$ — совокупность всех элементов группы $G$, порядки которых взаимно просты с порядком $S$;

4) $S$ — специальная группа и в $G$ существует нормальный делитель $N$ такой, что

$$G = NS,\ N \cap S = 1.$$

Эквивалентность условий 1) и 4) обобщает известную теорему Бернсайда.

Также доказываются необходимые и достаточные условия, определяющие гиперфокальную силовскую подгруппу произвольной группы и гиперфокальную $P$-подгруппу разрешимой группы. Как следствие, автор получает ряд необходимых и достаточных условий, определяющих фокальную $P$-подгруппу, а также гиперфокальную $P$-подгруппу, являющуюся нормальным делителем группы $G$.

Пусть порядок группы $G$ имеет вид $mn$, $(m, n) = 1$. Тогда:

1) Группа $G$ содержит гиперфокальную подгруппу порядка $m$ тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя $p$ числа $m$ в $G$ существует силовская $p$-подгруппа, являющаяся гиперфокальной в $G$.

2) Если $G$ содержит гиперфокальную подгруппу $S$ порядка $m$, то все подгруппы порядка $m$ сопряжены с $S$ и каждая подгруппа, порядок которой является делителем $m$, содержится в некоторой подгруппе порядка $m$ и, следовательно, является гиперфокальной в $G$.

Отсюда следует, что группа $G$ является специальной тогда и только тогда, когда для всякого простого числа $p$ в $G$ существует силовская $p$-подгруппа, являющаяся гиперфокальной в $G$. Кроме того, подгруппа $S$ является гиперфокальной в $G$ тогда и только тогда, когда для всякого простого числа $p$ существует силовская $p$-подгруппа группы $S$, являющаяся гиперфокальной в $G$.

Тем самым изучение гиперфокальных подгрупп сводится к изучению гиперфокальных $p$-подгрупп группы $G$.

В заключение автор применяет свои результаты для доказательства одной теоремы Грюна (Grün O., J. reine und angew. Math., 1945, 186, 165—169).

*П. А. Гольберг*

**98. Заметка об абелевых группах. Карлиц** (A note on abelian groups. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 937—938 (англ.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все элементы конечной абелевой группы $A$, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — те же элементы, но, быть может, как-то переставленные. Выясняется, каковы все те группы $A$, для которых перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ можно подобрать так, чтобы все элементы $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ были различными. Доказывается, что этим свойством обладают все абелевы группы нечетного порядка и те и только те абелевы группы четного порядка, в разложении которых в прямую сумму далее неразложимых циклических групп имеются по крайней мере два прямых слагаемых, порядок которых равен степени числа 2. В конце работы отмечено, что этот результат уже был получен ранее (Paige L. J., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 590—593).

*А. П. Мишина*

**99. О теореме Осима и Нагао. Фрейм, Робинсон** (On a theorem of Osima and Nagao. Frame J. S., Robinson G. de B.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 125—127 (англ.)

Дано новое доказательство теоремы о числе модулярных (по простому модулю $p$) неприводимых представлений симметрической группы $S_n$, ранее доказанной Осима (РЖМат, 1954, 2011) и Нагао (РЖМат, 1954, 2012). Доказана также следующая теорема:

Число $p$-регулярных классов группы $S_n$ равно числу разбиений числа $n$ на целые положительные слагаемые, не содержащих $p$ одинаковых слагаемых (класс называется $p$-регулярным, если порядок входящих в него элементов не делится на $p$).

*В. К. Туркин*

**100. Об унитарных кватернионных группах в двух и трех переменных. Дьёдонне** (Sur les groupes unitaires quaternioniques a deux et a trois variables. Dieudonné Jean), Bull. sci. math., 1953, сер. 10, 77, 195—213 (франц.)

Пусть $K$ — тело обобщенных кватернионов, $Z$ — центр $K$. Инволюция $J$ в $K$ называется инволюцией первого рода, если она оставляет неизменными все элементы $Z$, и второго рода — в противном случае. Существуют две инволюции первого рода; если 1,

$i, j, k$ — базис $K$, то это будут $\xi \to \bar{\xi}$ и $\xi \to j^{-1}\bar{\xi}j$. В конечномерном векторном пространстве над $K$ рассмотрим невырождающуюся эрмитову относительно $J$ форму. Структура соответствующей унитарной группы зависит от инволюции $J$. Случай эрмитовой относительно $\xi \to j^{-1}\bar{\xi}j$ формы сводится к рассмотрению формы антиэрмитовой относительно $\xi \to \bar{\xi}$. В работе определяются все антиэрмитовы относительно $\xi \to \bar{\xi}$ формы в пространствах двух и трех измерений над $K$, например $f(x, x) = -\frac{1}{2}(\bar{\xi}_1 i \xi_2 + \bar{\xi}_2 \xi_3 - \bar{\xi}_3 \xi_2)$, и изучаются соответствующие им унитарные группы; в частности, они интерпретируются как некоторые ортогональные группы в четырех- и шестимерных пространствах над полем $K_0$, некоммутативным квадратичным расширением которого является $K$. Случаи других инволюций и эрмитовых форм рассмотрены автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 367—385; Acta Math., 1952, **87**, 175—242). *А. В. Сульдин*

**101. Классификация простых подалгебр вещественных форм классических алгебр. Карпелевич Ф. И.**, Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 613—616

Излагаются результаты автора, решающие задачу о классификации простых вещественных подалгебр в вещественных формах алгебр $O(n)$ и $Sp(n)$. Эти результаты опираются на результаты классификации простых подалгебр в вещественных формах алгебры $SL(n)$, опубликованные автором ранее (Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 6, 1205—1208), и вместе с ними полностью решают вопрос о классификации простых вещественных подалгебр в вещественных классических алгебрах Ли.

Работа основывается на картановской теории вещественных форм комплексных полупростых алгебр Ли и на теории линейных представлений полупростых алгебр Ли. Вложение $\varphi$ вещественной простой алгебры $G$ в вещественную форму классической алгебры рассматривается как линейное представление алгебры $G$. Это представление естественным образом продолжается в представление $[\varphi]$ комплексной полупростой алгебры $[G]$ — комплексной оболочки алгебры $G$. Если представление $[\varphi]$ неприводимо, то результаты автора позволяют определить по старшему весу представления $[\varphi]$, в какую вещественную форму какой классической алгебры отображает $\varphi$ алгебру $G$. Если $[\varphi]$ приводимо, то приходится вводить некоторый набор целых чисел, который вместе со старшим весом $[\varphi]$ вполне характеризует представление $\varphi$. Но и в этом случае все результаты совершенно эффективны.

В работе имеется ряд опечаток и неточностей. На стр. 613, строка 10 снизу, вместо $R$ должно быть $[R]$. Фразу на стр. 614, строки 3—4 снизу, следует читать так: «Пусть $G$ — простая вещественная алгебра Ли и $\varphi$ — неприводимое представление $[G]$ в $SL(n)$». *А. Л. Онищик*

**102. Дополнения и исправления к моей работе «Об автоморфизмах вещественной полупростой алгебры Ли». Мураками** (Supplements and corrections to my paper: On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra. Murakami Shingo), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 1, 105—112 (англ.)

В работе, упомянутой в заглавии (J. Math. Soc. Japan, 1952, **4**, 103—133), среди других результатов содержится вывод канонического представления инволютивного автоморфизма компактной полупростой алгебры Ли, аналогичного представлению, найденному Ф. Р. Гантмахером для инволютивного автоморфизма комплексной полупростой алгебры Ли. При этом автор опирался на результаты Гантмахера. Теперь он предлагает новое доказательство, независимое от результатов Гантмахера.

Приводится ряд исправлений к упомянутой работе автора. В частности, указывается, что проведенное там вычисление автоморфизмов вещественных форм алгебры $A_n$ проходит лишь при $n \geqslant 2$. Две вещественные формы $A_1$ — алгебра косоэрмитовых матриц порядка 2 со следом 0 и алгебра вещественных матриц порядка 2 со следом 0—соответственно не имеют ни одного или имеют один внешний автоморфизм (с точностью до внутреннего).

*А. Л. Онищик*

**103. Расширение частично упорядоченных групп до структурно упорядоченных групп. Лоренцен** (Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen. Lorenzen Paul), Math. Z., 1953, **58**, № 1, 15—24 (нем.)

Дается обобщение одного результата Крулля (Krull W., J. reine und angew. Math., 1931, **167**, 160—196). В поле частных $K$ области целостности $I$ любая логарифмическая норма определяет кольцо целых относительно этой нормы элементов. Крулль показал, что для того чтобы область целостности $I$ представлялась в виде пересечения некоторого множества таких колец, необходимо и достаточно чтобы $I$ была целозамкнута в $K$. Автором было показано (Math. Z., 1949, **52**, 483—526), что проблема представимости целозамкнутой области целостности в виде такого пересечения содержится в следующей проблеме. Рассмотрим частично упорядоченную группу. Автор понимает везде под частично упорядоченным множеством множество, в котором для отношения $\geqslant$ выполняются только аксиомы рефлексивности и транзитивности, но не антисимметрии. Связь между частичной упорядоченностью и групповой операцией обычная. Пусть для группы задана некоторая содержащая ее минимальная полуструктура, т. е. частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов существует пересечение, определяемое обычным образом, и которая в силу минимальности состоит только из конечных пересечений элементов группы. Так как антисимметричность отношения $\geqslant$ не предполагается, то пересечение определено неоднозначно, но все пересечения «конгруентны» (одновременно больше и меньше друг друга). Упорядочение полуструктуры называется допустимым, если оно является усилением существующей в ней частичной упорядоченности и сохраняет пересечения (т. е. все пересечения пары элементов в смысле частичной упорядоченности являются пересечениями и в смысле упорядочения). Пересечением некоторой совокупности упорядочений данного множества называется частичная упорядоченность, в которой $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant b$ при любом упорядочении из этой совокупности. Требуется установить, индуцируется ли данная частичная упорядоченность группы с данной полуструктурой пересечением допустимых упорядочений полуструктуры. Было доказано, что частичная упорядоченность группы $e$

полуструктурой является пересечением допустимых упорядочений тогда и только тогда, когда группа замкнута относительно полуструктуры; доказано также, что структурная упорядоченность структурно упорядоченной группы является пересечением допустимых упорядочений тогда и только тогда, когда группа регулярна (определения понятий замкнутости и регулярности см. в упомянутой выше работе автора). В настоящей работе автор показывает, что любую частично упорядоченную группу с заданной полуструктурой пересечений можно вложить в регулярную структурно упорядоченную группу. Отсюда автор выводит новое решение проблемы.

*Я. В. Хион*

**104. О нижнем пределе для числа гипергрупп данного порядка. Кампейн** (A lower limit on the number of hypergroups of a given order. Campaigne Howard H.), J. Wash. Acad. Sci., 1954, **44**, № 1, 5—7 (англ.)

Гипергруппой называется множество Г, в котором определена операция умножения, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Произведение $ab$ любых двух элементов $a$ и $b$ из Г есть подмножество Г.

(Если $A$ и $B$ — подмножества Г, то произведением $AB$ называется подмножество Г, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из произведений вида $a_i b_j$, где $a_i \in A$ и $b_j \in B$. Если $O$ является пустым множеством, то $OA = AO = O$).

2. Умножение ассоциативно.

3. Для любых элементов $a$ и $b$ из Г в Г имеются такие элементы $x$ и $y$, что $b \in ax$ и $b \in ya$.

Показывается, что число неизоморфных гипергрупп порядка $n$, т. е. содержащих $n$ элементов, при $n \geqslant 3$ всегда больше $8 \cdot 10^{n-2}$ и, очевидно, не превосходит $(2^n - 1)^{n^2}$.

*А. П. Дицман*

## ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

**105. К простому определению группы классов мнимого квадратичного поля. Айгнер** (Zur einfachen Bestimmung der Klassengruppe eines imaginär quadratischen Körpers. Aigner Alexander), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 408—411 (нем.)

Рассматривая разложение норм целых чисел мнимого квадратичного поля $K$ на простые множители, автор указывает некоторые простые правила, облегчающие в отдельных случаях вычисление группы классов идеалов поля $K$.

*З. И. Боревич*

**106. Теория идеалов в одном бесконечном поле алгебраических чисел. Накано** (Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper. Nakano Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 425—439 (нем.)

Рассматривается поле алгебраических чисел $\mathfrak{K}$, являющееся объединением возрастающей последовательности конечных расширений $\mathfrak{K}_\nu$ поля рациональных чисел, причем предполагаются выполненными следующие два условия:

1) при разложении любого простого числа $p$ в $\mathfrak{K}_\nu$: $p = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu \lambda_\nu}^{e_{\nu \lambda_\nu}}$, каждый показатель $e_{\nu i}$ становится постоянным, начиная с некоторого $\nu$;

2) из последовательности полей $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\mathfrak{K}_\mu\}$, что любой простой делитель $p$ из $\mathfrak{K}_\mu$ разлагается в $\mathfrak{K}_{\mu+1}$ по крайней мере на два множителя.

Примером такого поля является поле, получающееся присоединением к полю рациональных чисел корней всех простых степеней из единицы. Для полей, обладающих свойствами 1) и 2), доказываются следующие свойства. Любой примарный идеал является степенью простого. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал, то из $\mathfrak{p}^a = \mathfrak{p}^b$ следует $a = b$. Между $\mathfrak{p}^e$ и $\mathfrak{p}^{e+1}$ не существует промежуточных идеалов. $\mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^r$. Для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$ существует такое бесконечное множество простых идеалов $\mathfrak{p}_i$, что $\mathfrak{p} \supset \bigcap_i \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$. Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_i$ — все различные простые делители какого-либо идеала $\mathfrak{a}$; тогда условия $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{p} \supset \bigcap_i \mathfrak{p}_i$ равносильны. Никакой идеал, отличный от нулевого и единичного, не идемпотентен. Для любого делителя $\mathfrak{b}$ идеала $\mathfrak{a}$ найдется такой идеал $\mathfrak{z}$, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{z}$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ для всех простых делителей $\mathfrak{p}$ идеала $\mathfrak{a}$. Никакой простой идеал $\mathfrak{p}$ не имеет конечного базиса, $\mathfrak{p}^{-1} = (1)$.

*И. Р. Шафаревич*

**107. О нормах с частично упорядоченной группой значений. Ауберт** (Über Bewertungen mit halbgeordneter Wertgruppe. Aubert Karl Egil), Math. Ann., 1954, **127**, № 1, 8—14 (нем.)

Используя понятие $r$-идеала Прюфера — Лоренцена в абелевой ненаправленной группе Г, автор определяет $r$-норму $w$ поля $K$ как гомоморфизм мультипликативной группы $K^*$ поля $K$ на Г, для которого

$$w(a - b) \in (w(a), w(b))_r, \quad a \neq b, \ a, b \in K^*.$$

Здесь $(x, y)_r$ обозначает $r$-идеал в группе Г, порожденный элементами $x, y \in$ Г. Норма Крулля (Krull W., J. reine und angew. Math., 1932, **167**, 160—196) и полунорма Зелинского (Zelinsky D., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, 1145—1150) получаются как крайние частные случаи понятия $r$-нормы (для $s$-идеалов и $v$-идеалов соответственно). Устанавливаются некоторые элементарные свойства $r$-норм.

*З. И. Боревич*

**108. Характеристика некоммутативных систем посредством формулы-произведения из теории метрик с применением к теории единиц. Бенц** (Charakterisierung nichtkommutativer Systeme durch eine bewertungstheoretische Produktformel mit einer Anwendung auf die Einheitentheorie. Benz Herbert), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 174—178 (нем.)

Псевдометрикой кольца $R$ автор называет вещественную функцию $\varphi$, определенную на $R$ и удовлетворяющую условиям: 1) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) > 0$ при $a \neq 0$; 2) $\varphi(ab) \leqslant \varphi(a)\varphi(b)$; 2') для каждого значения $\varphi(a)$ существует $c \in R$ ($\varphi$-элемент) такой, что $\varphi(a) = \varphi(c)$ и $\varphi(cb) = \varphi(bc) = \varphi(c)\varphi(b)$ при всех $b \in R$; 3) $\varphi(a - b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$.

Без подробного доказательства утверждается, что простое кольцо (с единицей) $R$ является простой алгеброй конечного ранга над полем рациональных чисел или над полем рациональных функций от одной переменной с конечным полем констант тогда и только тогда, если:

I) на $R$ существует система $F$ независимых в смысле аппроксимации псевдометрик $\varphi$, для которых $\varphi(a) \neq 1$ только для конечного числа $\varphi$ и $\prod_{\varphi \in F} \varphi(a) \geqslant 1$ при $a \neq 0$;

II) система $F$ содержит либо архимедову, либо дискретную псевдометрику $\varphi$ с конечным кольцом вычетов, для которой существует $\varphi$-элемент $z$ из центра $R$ с условием $\varphi(z) > 1$.

Если $S$ — конечное подмножество $F$, то $S$-единицей называется такой регулярный элемент $a \in R$, для которого $\varphi(a) \neq 1$ только для $\varphi \in S$. Также без доказательства утверждается, что при выполнении условий I) и II) $S$-единицы кольца $R$ образуют группу с конечным числом образующих.

*З. И. Боревич*

**109. Структура некоторых колец. Херстейн** (The structure of a certain class of rings. Herstein I. N.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 864—871 (англ.)

Дается следующее обобщение одной из теорем Джекобсона: Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с центром $Z$ и пусть для каждого элемента $a \in R$ можно указать целочисленный многочлен $p_a(t)$, для которого $a^2 p_a(a) - a \in Z$. Тогда $R$ коммутативно. См. также РЖМат, 1953, 105. *В. М. Курочкин*

**110. Условие максимальности коммутативного кольца линейных операторов. Шарль** (Un critère de maximalité pour les anneaux commutatifs d'opérateurs linéaires. Charles Bernard), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 19, 1835—1837 (франц.)

Пусть $E$ есть $n$-мерное векторное пространство над коммутативным полем $K$. Коммутативная нильпотентная алгебра $R$ над полем $K$, состоящая из линейных операторов векторного пространства $E$, называется максимальной, если ее централизатор $R'$ во всем кольце линейных операторов пространства $E$ совпадает с алгеброй $r(R, I)$, порожденной $R$ и единичным оператором $I$.

Через $\overline{R}^{-1}(0)$ обозначается совокупность всех векторов $x$, аннулируемых алгеброй $R$; подпространство $E_1$ называется допустимым относительно подалгебры $R_1$, если $R_1(E) = R_1(E_1) \subset E_1$.

Доказывается теорема:

Пусть $R = R_1 + \ldots + R_s$ — разложение коммутативной нильпотентной алгебры линейных операторов в сумму ее подалгебр и $E_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ — допустимое относительно $R_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ подпространство, причем выполняется условие $\overline{R}_i^{-1}(0) = F_i$, где $F_i$ — сумма всех подпространств $E_j$ для $j \neq i$. Тогда, если каждое слагаемое $R_i$, рассматриваемое как алгебра линейных операторов над векторным пространством $E_i$, максимально, то и сама алгебра $R$ максимальна.

Указывается, что максимальными коммутативными нильпотентными алгебрами линейных операторов являются, например, такие алгебры $R$, для которых или алгебра $r(R, I)$ неприводима, или размерность подпространства $\overline{R}^{-1}(0)$ равна 1.

В заключение автор отмечает, что, используя результаты этой заметки, можно всегда установить, является ли максимальной коммутативная нильпотентная алгебра линейных операторов векторного пространства размерности не больше пяти, рассматриваемого над полем комплексных чисел.

*Е. Г. Шульгейфер*

**111. Общий пример коммутативного кольца линейных операторов, для которого $R'' \neq r(R, I)$. Шарль** (Un exemple général d'anneau commutatif d'opérateurs linéaires tel que $R'' \neq r(R, I)$. Charles Bernard), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 21, 2027—2029 (франц.)

Пусть коммутативная нильпотентная алгебра $R$ над полем $K$, состоящая из линейных операторов $n$-мерного векторного пространства $E$ над тем же полем $K$, представима в виде суммы двух подалгебр $R_1$, $R_2$, и $E_i$ — допустимое относительно $R_i$ подпространство (терминологию и обозначения см. в реф. 110), причем выполняются следующие условия:

1) $R_1(E_2) = R_2(E_1) = 0$;

2) $\overline{R}_2^{-1}(0) \cap E_2 = \overline{R}^{-1}(0)$, $\overline{R}_1^{-1}(0) \cap E_1 \subset \overline{R}^{-1}(0)$;

3) $R_1$ и $R_2$, рассматриваемые как алгебры линейных операторов соответственно над векторными пространствами $E_1$ и $E_2$, являются максимальными.

Тогда второй централизатор $R''$ алгебры $R$ не совпадает с алгеброй $r(R, I)$. Приводится конкретный пример коммутативной нильпотентной алгебры матриц четвертого порядка, для которой существует представление в виде суммы двух подалгебр, удовлетворяющее условиям 1) — 3).

В заключение отмечается, что если размерность векторного пространства $E$ меньше четырех, то всегда $R'' = r(R, I)$. *Е. Г. Шульгейфер*

**112. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля. Хиггинс** (Lie rings satisfying the Engel condition. Higgins P. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 8—15 (англ.)

По определению, кольцо Ли $L$ удовлетворяет $n$-му условию Энгеля, если для любых двух элементов $a$ и $x$ кольца $L$ справедливо равенство

$$\underbrace{(\ldots(ax)x\ldots)x}_{n} = 0.$$

Кольцо Ли называется разрешимым, если $L^{(s)} = 0$ для некоторого натурального $s$ (здесь принимается $L^{(i)}L^{(i)} = L^{(i+1)}$, $L^0 = L$). Автор доказывает эквивалентность нильпотентности и разрешимости для колец Ли, удовлетворяющих $n$-му условию Энгеля, если характеристика кольца взаимно проста с $n$. Кроме того, автор доказывает нильпотентность колец Ли, удовлетворяющих $n$-му условию Энгеля в следующих частных случаях: 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; характеристика взаимно проста с 10 и 3) $n = 4$, характеристика взаимно проста с 7. *А. И. Ширшов*

**113. О полупростых алгебрах Ли. Дьёдонне** (On semi-simple Lie algebras. Dieudonné Jean), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 931—932 (англ.)

Симметричная билинейная форма $\varphi$ от пар элементов некоторой алгебры Ли $L$ называется инвариантной, если

$$\varphi(XY, Z) = \varphi(X, YZ), \text{ где } X, Y, Z \in L.$$

Дается простое доказательство следующего предложения, обобщающего критерий Картана полу-

простоты алгебры Ли $L$ (на характеристику основного поля не накладывается никаких ограничений): Если алгебра Ли $L$ не содержит абелевых идеалов $\neq 0$ и если существует симметричная инвариантная невырожденная билинейная форма $\varphi(X, Y)$, то $L$ есть прямая сумма простых неабелевых подалгебр.

*А. И. Ширшов*

**114. Структуры, порождаемые $p$-кольцом. Ито, Найто** (*p* o 環から導かれる束について o 伊藤誠, 内藤實), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 32—34 (япон.)

Обобщая известный переход от булевых колец к булевым структурам, авторы описывают все структуры, которые можно получить, вводя для элементов $p$-кольца структурные операции, записываемые через операции самого кольца. Под $p$-кольцом понимается при этом коммутативное кольцо с единицей, в котором выполняются тождества $x^p = x$, $px = 0$, где $p$ — простое число. Сначала описываются структуры, строящиеся на простом поле характеристики $p$; переход к общему случаю основывается на том, что всякое $p$-кольцо вкладывается в прямую сумму этих полей (теорема Маккоя и Монтгомери). Авторы отмечают, что их работа несколько перекрывается работой Мойсила (Moisil Gr. C., Bull. Ecole Polytechnique de Bucarest, 1941, **12**, 66—90).

*А. Г. Курош, Лю Шао-сюэ*

**115. Характеристика импликативных булевых колец. Копленд Харари** (A characterization of implicative Boolean rings. Copeland A. H., Harary Frank), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 465—469 (англ.)

Булева алгебра или булево кольцо $B$ называется импликативным, если существует бинарная операция $\times$, удовлетворяющая следующим постулатам:

P0. $B$ замкнуто относительно $\times$.

P1. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

P2. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, где $+$ означает симметричную разность.

P3. $a \times (b \cdot c) = (a \times b) \cdot (a \times c)$.

P4. Из $x \neq 0$ и $x \times y = x \times z$ следует $y = z$.

P5. $x \times 1 = x$.

P6. Если $x, y \in B$ и $y \neq 0$, то существует элемент $z$, для которого $x \cdot y = y \times z$.

Для того чтобы булево кольцо $B$ было импликативным, необходимо и достаточно, чтобы для всех $a \in B$, $a \neq 1$, булевы кольца $B$ и $B/(a)$ были изоморфны. Дается формально логическая интерпретация одного из понятий.

*А. Х. Лившиц*

---

См. также: 11 К, 38, 117, 138, 145, 146, 168, 186, 335, 337, 345, 353 К, 354, 366 Д, 392, 402, 407, 435—437, 458, 459, 462—465

## ТОПОЛОГИЯ

**116. О размерности пространств близости. Смирнов Ю. М.**, Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 4, 717—720

В этой заметке закладываются основы теории размерности пространств близости (далее называемых $\delta$-пространствами) и убедительно показывается содержательность этой теории, хотя и имеющей естественные параллели с обычной теорией размерности, но отнюдь не являющейся ее повторением или переработкой.

Покрытие $\delta$-пространства $P$ называется $\delta$-покрытием, если для любых двух близких в $P$ множеств $A$ и $B$ существует элемент этого покрытия, пересекающийся как с $A$, так и с $B$. Конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_i\}$ является $\delta$-покрытием тогда и только тогда, когда можно подобрать такие множества $A_i \subseteq \Gamma$, что $A_i$ дают в сумме все $P$; при этом $A \subseteq \Gamma$ означает, что $A$ не близко к $P \setminus \Gamma$. Автор называет $\delta$-размерностью $\delta$-пространства $P$, $\delta dP$, наименьшее из таких целых чисел $n \geqslant 0$, что в любое конечное $\delta$-покрытие пространства $P$ можно вписать конечное $\delta$-покрытие кратности $\leqslant n+1$; если таких чисел $n$ нет, то полагаем $\delta dP = \infty$.

Исходной теоремой всей теории является следующая: $\delta$-размерность $\delta$-пространства $P$ совпадает с размерностью его бикомпактного абсолютно замкнутого $\delta$-расширения $uP$ (т. е. того бикомпактного расширения пространства $P$, рассматриваемого как топологическое вполне регулярное пространство, которое в силу основной теоремы Ю. М. Смирнова соответствует данному отношению близости, превращающему $P$ в $\delta$-пространство). Отсюда легко выводится, что $\delta$-размерность есть инвариант $\delta$-гомеоморфных отображений, обладающий свойством монотонности, причем $\delta$-размерность конечной суммы множеств равна наибольшей из размерностей слагаемых. Если $A$ плотно в $P$, то $\delta dA = \delta dP$. Последнее свойство резко отличает $\delta$-размерность от обычной размерности.

Если $\alpha$ есть $\delta$-покрытие пространства $P$, то $\alpha$-отображения определяются как обычно, с тою лишь разницей, что речь идет все время лишь о $\delta$-отображениях. Имеет место следующий аналог «теоремы об $\varepsilon$-сдвигах»: $\delta$-размерность $\delta$-пространства $P$ есть наименьшее из всех таких целых чисел $n \geqslant 0$, что для любого $\delta$-покрытия $\alpha$ пространства $P$ существует $\alpha$-отображение пространства $P$ в некоторый $n$-мерный полиэдр $P_\varepsilon$, причем образ пространства $P$ при этом отображении есть множество, плотное в полиэдре $P_\varepsilon$.

Имеет место и аналог теоремы о существенных отображениях: $\delta$-отображение $f$ $\delta$-пространства $P$ в замкнутый шар $\overline{U}$ называется существенным, если не существует никакого $\delta$-отображения пространства $P$ в границу $S$ шара $U$, совпадающего с $f$ на $f^{-1}S$; оказывается, что $\delta$-размерность пространства $P$ есть наибольшее из всех целых чисел $n \geqslant 0$, для которых имеется существенное отображение пространства $P$ на $n$-мерный замкнутый шар.

Большой интерес представляет изучение $\delta$-размерности множеств, лежащих в евклидовых пространствах, только начатое в реферируемой работе. Автор доказывает теорему: для того чтобы множество $A \subset R^n$ имело $\delta$-размерность $n$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное $r$, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти шар

Радиуса $r$, в котором множество $A$ образует $\varepsilon$-сеть. Отсюда следует, что всякое множество, где-либо плотное в $R^n$, имеет $\delta$-размерность $n$; ограниченное множество тогда и только тогда имеет $\delta$-размерность $n$, когда оно где-нибудь плотно в $R^n$. Для неограниченных множеств последнее утверждение не имеет места: $\delta$-размерность множества зависит от того, как оно «сгущается» при удалении в бесконечность. Это обстоятельство изучается посредством понятий окаймления и краевой размерности $\delta$-пространства $P$. Именно, окаймлением $\delta$-пространства $P$ назовем всякую конечную систему множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ этого пространства, к которой можно подобрать такую систему $A_1 \in \Gamma_1, \ldots, A_k \in \Gamma_k$, что замыкание в $P$ множества $P \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)$ бикомпактно; краевой размерностью $\delta$-пространства $P$ называется наименьшее из таких целых $n \geqslant -1$, что во всякое окаймление пространства $P$ можно вписать окаймление кратности $\leqslant n+1$.

Оказывается, что краевая размерность пространства $P$ (обозначаемая через $\delta d^{\infty} P$) равна $\delta$-размерности его края $uP \setminus P$.

Наконец, называя относительной размерностью $rdR$ вполне регулярного пространства $R$ наибольшее число, являющееся размерностью какого-либо содержащегося в $R$ бикомпакта, получаем следующий результат: для любого $\delta$-пространства $P$ его $\delta$-размерность равна наибольшему из двух чисел: $\delta d^{\infty} P$ и $rdP$.

В работе, наконец, дается адэкватное определение размерности любого вполне регулярного пространства $R$. Скажем прежде всего, что множество $A_0$ вполне регулярного пространства $R$ функционально вложено в множество $A_1$ того же пространства, если $A_0$ и $R \setminus A_1$ функционально отделимы. Конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_i\}$ пространства $R$ называется нормальным, если существует такое покрытие $\alpha = \{A_i\}$ этого пространства, что $A_i$ функционально вложено в $\Gamma_i$. Размерность вполне регулярных пространств определяется как обычно, но не при помощи любых покрытий, а при помощи одних лишь нормальных покрытий. *П. С. Александров*

**117. Полярность между топологическими пространствами и пространствами пределов. Зоннер** (Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen. Sonner H.), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 461—469 (нем.)

Дается решение проблемы № 20 Г. Биркгофа (Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, гл. 4, § 5, 93) об установлении полярности между топологическими пространствами и пространствами пределов. Однако последние определяются в отличие от Г.Биркгофа следующим способом: множество $M$ превращается в пространство пределов, если на нем задана система $K$ пар $(\Phi, x)$, каждая из которых состоит из некоторого фильтра $\Phi$ в смысле Бурбаки и некоторого элемента $x \in M$. Символ $(\Phi, x)$ означает, что $x$ является пределом фильтра $\Phi$. При этом система $K$ должна подчиняться следующим условиям: 1) если $x \in \Phi$, то $(\Phi, x) \in K$; 2) если $(\Phi, x) \in K$ и $\Phi' \supset \Phi$, то $(\Phi', x) \in K$; 3) для каждой пары $(\Psi, y) \notin K$ существует содержащее $y$ и не принадлежащее $\Psi$ множество $G$, обладающее тем свойством, что для любой пары $(\Phi, x) \in K$ или $x \notin G$, или $G \in \Phi$. Полярность заключается в том, что каждое множество $G$, обладающее только что указанным свойством, считается открытым и, наоборот, элемент $x$ считается пределом фильтра $\Phi$, если для любого открытого множества $G$ либо $x \notin G$, либо $G \in \Phi$. В работе по сути дела доказывается, что данное выше определение пространства пределов есть всего лишь другая эквивалентная форма определения топологического пространства. *Ю. М. Смирнов*

**118. О характеризации минимальных бикомпактных пространств: ошибки и добавления. Падмавалли** (On a characterization of minimally bicompact spaces: corrections and additions. Padmavally K.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 3, 143—149 (англ.)

Указывается ошибка в основной теореме предыдущей работы этого же автора: доказательство необходимости и достаточности некоторого условия для того, чтобы топологическое пространство было минимальным бикомпактным пространством неверно во второй своей части (Padmavally K., J. Indian Math. Soc., 1952, **16**, № 2, 63—68).

Следуя П. С. Александрову (Александров П. С., Math. Ann., 1924, **92**, 267—274), назовем характером сходимости точки $\xi \in R$ наименьшее из всех таких кардинальных чисел $m$ (если только такие существуют), что найдется множество $M \subseteq R$ мощности $m$, удовлетворяющее следующему условию: для любой окрестности $O\xi$ точки $\xi$ мощность множества $M \cap O\xi$ превосходит мощность множества $M \setminus O\xi$. В добавлении доказываются следующие утверждения: 1) всякое бикомпактное пространство имеет по крайней мере одну точку, обладающую характером сходимости; 2) ослабляя топологию, всякое бикомпактное пространство можно превратить в такое бикомпактное пространство, в котором всякая точка обладает характером сходимости. *Ю. М. Смирнов*

**119. О бикомпактной оболочке изолированного счетного множества. Новак** (Über die bikompakte Hülle einer isolierten abzählbaren Menge. Novák Josef), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 280—283 (нем.)

Кратко излагаются результаты уже прореферированных работ (РЖМат, 1954, 4764, 5480), а также кратко намечено построение вполне регулярного некомпактного пространства, на котором всякая непрерывная действительная функция ограничена. Все построения делаются в максимальном бикомпактном (чеховском) расширении $\beta N$ множества $N$ натуральных чисел. *Ю. М. Смирнов*

**120. Исправление к работе «О действительнозначных функциях в топологических пространствах». Катетов** (Correction to «On real-valued functions in topological spaces». Katětov M.), Fundam. math., 1953, **40**, 203—205 (англ.)

В работе автора «О действительно-значных функциях в топологических пространствах» (Katětov M., Fundam. math., 1951, **38**, 85—91) лемма на стр. 86 ошибочна. Автор доказывает две леммы, при применении которых в цитированной работе вместо указанной ошибочной леммы получается правильное доказательство (остальная часть доказательства не меняется). *H. Fast*

**121. О полных нульмерных пространствах со счетной базой. Кнастер, Урбаник** (Sur

les espaces complets séparables de dimension 0. Knaster B., Urbanik K.), Fundam. math., 1953, **40**, 194—202 (франц.)

Рассматриваются нульмерные абсолютные $G_\delta$ со счетной базой. Доказывается, что все такие пространства гомеоморфны подмножествам канторова совершенного множества $C$, которые получаются из содержащихся в $C$ замкнутых множеств выкидыванием конечного или счетного числа односторонних (левых или правых) концевых точек. Эта и две следующие за ней теоремы, как указывают авторы, лишь по форме отличаются от известных теорем о нульмерных $G_\delta$.

Кроме этих известных результатов, приведены следующие:

Всякое множество, не содержащее непустого плотного в себе подмножества, гомеоморфно подмножеству вполне упорядоченного (по величине) компактного множества, содержащегося в множестве односторонних концевых точек смежных интервалов канторова совершенного множества $C$.

Всякое нульмерное (абсолютное) $G_\delta$ со счетной базой гомеоморфно множеству концевых точек дерева, имеющего точки ветвления только индекса 3.

*А. С. Пархоменко*

122. **Неприводимо связные пространства.** Стреб (Irreducibly connected spaces. Strebe David D.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 551—561 (англ.)

Автор называет связное топологическое пространство $M$ неприводимо связным относительно множества $A \subset M$, если никакое собственное связное подмножество пространства $M$ не содержит множества $A$ (§ 1). В § 2 исследуется вопрос о зависимости тех множеств, относительно которых пространство $M$ неприводимо связно, от структуры множества точек, разбивающих пространство $M$. В § 3 автор вводит следующее определение базисного множества: множество $B \subset M$ называется базисным, если пространство $M$ неприводимо связно относительно множества $B$, но не является неприводимо связным относительно никакого собственного подмножества $B$. В § 4 рассматриваются пространства с конечными базисными множествами. В § 5 изучаются метрические пространства со счетной базой, у которых имеются счетные базисные множества. В частности, доказывается, что всякий континуум со счетным базисным множеством есть ациклическая кривая.

*А. С. Пархоменко*

123. **Пример связного неразложимого хаусдорфова пространства.** Падмавалли (An example of a connected irresolvable Hausdorff space. Padmavally K.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 513—520 (англ.)

Дается утвердительный ответ на вопрос, поставленный Хьюиттом (Hewitt E., Duke Math. J., 1943, **10**, 309—333) относительно существования связного неразложимого хаусдорфова пространства. Под неразложимым пространством понимается здесь топологическое пространство $R$, плотное в себе и непредставимое в виде суммы двух плотных в $R$ подмножеств без общих точек. Строится пример связного неразложимого урысоновского пространства (т. е. пространства, каждые две точки которого обладают окрестностями с непересекающимися замыканиями).

Примечание референта. Первый пример этого рода был построен И. Л. Раухваргер.

*А. С. Пархоменко*

124. **Объединенное пространство для отображений.** Уайберн (A unified space for mappings. Whyburn G. T.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 4, 344—350 (англ.)

Для произвольного непрерывного отображения $f$ топологического пространства $X$ на топологическое пространство $Y$ автор определяет новое «объединенное» пространство $Z$. Оно состоит из точек пространств $X$ и $Y$, а топология в нем вводится следующим образом: множество $Q$ открыто в $Z$, если $Q \cap X$ открыто в $X$, $Q \cap Y$ открыто в $Y$ и если для любого бикомпактного множества $K \subset Q \cap Y$ множество $f^{-1}(K) \cap (X \setminus Q)$ бикомпактно.

Определяется отображение $r$ пространства $Z$ на $Y$:

$$r(z) = \begin{cases} z & \text{при } z \in Y, \\ f(z) & \text{при } z \in X. \end{cases}$$

Автор доказывает, что если $X$ и $Y$ суть $T_2$-пространства, то $Z$ есть $T_1$-пространство; если пространства $X$ и $Y$ локально бикомпактны, то $Z$ регулярно; если $X$ и $Y$, кроме того, имеют счетную базу, то и $Z$ имеет счетную базу. В частности, если $X$ и $Y$ — локально компактные метрические пространства со счетной базой, то и $Z$ есть метризуемое пространство со счетной базой. Отображение $r$ непрерывно и бикомпактно, т. е. обладает тем свойством, что полный прообраз любого бикомпактного множества бикомпактен; если отображение $f$ открыто, то и $r$ открыто.

*И. А. Вайнштейн*

125. **О рациональных одномерных компактах.** Тумаркин Л. А., Вестн. Моск. ун-та, 1953, **5**, № 8, 73—78

Видоизменяя определение Менгера, автор называет $n$-мерное метрическое пространство $R$ со счетной базой рациональным, если в нем имеется счетное всюду плотное множество, дополнение которого $(n-1)$-мерно. Пространство $R$ называется однородно-рациональным, если это свойство имеет место для любого счетного всюду плотного множества. Автор доказывает, что одномерный компакт $R$ будет в том и только в том случае 1) однородно-рациональным, 2) неоднородно-рациональным и 3) иррациональным (т. е. нерациональным), если соответственно 1) в $R$ нет континуумов конденсации, 2) в $R$ имеются континуумы конденсации, но нет точек индекса $c$, и 3) в $R$ имеются точки индекса $c$.

*И. А. Вайнштейн*

126. **О непрерывных семействах непрерывных кривых.** Хамстром (Concerning continuous collections of continuous curves. Hamstrom Mary-Elizabeth), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 240—243 (англ.)

Мойс доказал (Moise E. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 810—811), что не существует открытого отображения неприводимого континуума на простую дугу, которое удовлетворяет следующему условию: (а) полный прообраз каждой точки есть простая дуга. В реферируемой работе содержатся две теоремы, усиливающие результат Мойса. Именно, доказано, что: 1) это утверждение остается в силе, если вместо (а) потребовать, чтобы полный прообраз

каждой точки был локально связным континуумом; 2) если существует открытое отображение плоского континуума $M$ на простую дугу, удовлетворяющее условию (а), то $M$ есть замыкание области; если при этом континуум $M$ локально связен, то его граница есть простая замкнутая линия.

*И. А. Вайнштейн*

**127. Континуумы, являющиеся суммой конечного числа неразложимых континуумов. Берджесс** (Continua which are the sum ot a finite number of indecomposable continua. Burgess C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 234—239 (англ.)

Континуум $M$ называется неразложимым по индексу $n$ (Swingle P. M., Amer. J. Math., 1930, **52**, 647—658), если он является суммой $n$ континуумов, каждый из которых не содержится в сумме остальных, но не является суммой $n+1$ континуумов, обладающих этим свойством. Суингль доказал (см. там же), что если континуум $M$ неразложим по индексу $n$, то он представим в виде суммы $n$ неразложимых континуумов, каждый из которых не содержится в сумме остальных. В реферируемой работе показано, что при любом $n$ такое представление единственно (для $n=2$ это было установлено автором ранее). Далее, для того чтобы континуум $M$ был неразложим по индексу $n$ (при $n>1$), необходимо и достаточно, чтобы $M$ был суммой $n$ неразложимых континуумов, каждый из которых не содержится в сумме остальных, и был неприводим относительно $n$ точек. Автор приводит также некоторые другие предложения о континуумах, неразложимых по индексу $n$. *И. А. Вайнштейн*

**128. Понятие однородности и продолжение гомеоморфизмов. Кнастер, Рейхбах** (Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies. Knaster B., Reichbach M.), Fundam. math., 1953, **40**, 180—193 (франц.)

Изучаются условия, при которых гомеоморфное отображение $h$ подмножества $P$ пространства $M$ на подмножество $Q \subset N$ может быть продолжено в гомеоморфизм $h^*$ пространств $M$ и $N$. Здесь и в дальнейшем все пространства — метрические со счетной базой; $h$ — гомеоморфизм, $h^*$ — продолжение $h$, $C$ (с индексами и без них) — канторов дисконтинуум.

Множество $E$ называется топологически однородным ранга $n$, если, каковы бы ни были два его подмножества $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, содержащие по $n$ различных точек каждое, существует гомеоморфизм $h(E)=E$, причем $h(x_i)=y_i$. Множество $E$ называется однородным ранга $\aleph_0$, если, каковы бы ни были два его счетных замкнутых гомеоморфных подмножества $F$ и $\Phi$, существует гомеоморфизм $h(E)=E$, причем $h(F)=\Phi$. Как отмечают авторы, Рылл-Нардзевский доказал в неопубликованной работе, что $C$ есть однородное множество ранга $\aleph_0$. В реферируемой статье доказывается ряд теорем, из которых, в частности, следует этот результат.

Определения. 1. Множество $P$ называется компактным относительно последовательности множеств $\{U_i\}$, если при любом $i$ множество точек $p_i \in P$, для которых $\rho(p_i, U_i)=\rho(P, U_i)$ непусто и компактно.

2. Две последовательности множеств $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$ конкурируют относительно множеств $P$ и $Q$ (где $h(P)=Q$), если: 1) $P$ и $Q$ компактны относительно $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$ соответственно, 2) для каждого $i$ существует такое $j=f(i)$, что $f(i_1)\neq f(i_2)$ при $i_1\neq i_2$, $V_{f(i)}$ гомеоморфно $U_i$ и $\rho(U_i, p_i)\geqslant\rho(V_{f(i)}, h(p_i))$, 3) для каждого $j$ существует такое $i=g(j)$, что $g(j_1)\neq g(j_2)$ при $j_1\neq j_2$, $U_{g(j)}$ гомеоморфно $V_j$ и $\rho(V_j, q_j)\geqslant\rho(U_{g(j)}, h^{-1}(q_j))$ ($q_j$ определяются в $Q$ аналогично $p_i$ в $P$).

Основная вспомогательная теорема:

Теорема 1. Пусть 1) $P\subset M$, $Q=h(P)\subset N$; 2) $M\setminus P=\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $N/Q=\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, где все $U_i$ и $V_j$ открыто-замкнуты, попарно не пересекаются, диаметры их стремятся к 0; 3) $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$ конкурируют относительно $P$ и $Q$. Тогда существует $h^*(M)=N$.

С помощью этой теоремы доказываются все последующие.

Теорема 2. Пусть $P\subset C_1$, $Q\subset C_2$, $P$ и $Q$ замкнуты, непусты и нигде не плотны на $C_1$ и $C_2$ соответственно, $h(P)=Q$. Тогда существует $h^*(C_1)=C_2$.

Теорема 3. Пусть $M=C_1\cup P$, $N=C_2\cup Q$, $P\cap C_1=\bar{P}\cap C_1$, $\mathrm{Гр}(P)\neq 0$, $h(P)=Q$ и $h(\mathrm{Fr}\,P)=\mathrm{Fr}\,Q$. Тогда существует $h^*(M)=N$.

Обозначим через $E^\alpha$ производное множество порядка $\alpha$ компакта $E$ ($\alpha<\Omega$), через $E_\alpha$ — разность $E^\alpha\setminus E^{\alpha+1}$.

Теорема 4. Пусть $M$ и $N$ — компакты, $h(M^\alpha)=N^\alpha$ для некоторого $\alpha<\Omega$ и $M^\alpha\subset\bar{M}_\xi$, $N^\alpha\subset\bar{N}_\xi$ для всех $\xi<\alpha$. Тогда существует $h^*(M)=N$.

Следствие. Все множества вида $\bar{H}=H\cup C$, где $H$ — изолированное множество, гомеоморфны между собой. *А. Л. Лунц*

**129. Об одном предложении Бинга. Капуано** (Sur une proposition de M. Bing. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 26, 2468—2469 (франц.)

Кнастером и Куратовским (Knaster B., Fundam. math., 1920, **1**, 223) была поставлена проблема: является ли всякий плоский невырожденный однородный континуум кривой Жордана? В связи с этой проблемой имеются противоречащие друг другу публикации: Варашкевич (Waraszkiewicz, C. r. Acad. sci., 1937, **204**, 1388—1390) опубликовал заметку, содержащую эскиз доказательства положительного ответа, а Бинг (Bing R. H., Duke Math. J, 1948, **15**, 729—741) — попытку построения плоского невырожденного однородного неразложимого континуума, на основании чего им был дан отрицательный ответ на сформулированный выше вопрос. Автор доказывает, что плоский однородный континуум не может иметь концов (значение последнего термина уточняется в работе); это противоречит одному утверждению из упомянутой работы Бинга. Таким образом, проблема Кнастера и Куратовского остается, повидимому, нерешенной. *А. С. Есенин-Вольпин*

**130. О топологической характеристике множества концов кривой. Кнастер, Рейхбах** (Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe. Knaster B., Reich-

bach M.), Fundam. math., 1953, **40**, 13—28 (франц.)

Известно, что множество $E^1$ концов кривой $E$ обладает следующими свойствами: 1) $E^1$ есть множество типа $G_\delta$, 2) $E^1$ имеет размерность нуль (кривая здесь понимается в смысле Урысона, т. е. как одномерный континуум; точка $e \in E$ называется концом кривой $E$, если для всякой окрестности $U(e) \subset E$ найдется окрестность $V(e) \subset U(e)$, граница которой состоит из одной точки).

Статья посвящена доказательству того, что условия 1) и 2) не только необходимы, но в некотором смысле и достаточны для того, чтобы множество было множеством концов кривой. Именно, для любого множества $H$, удовлетворяющего этим условиям, строится плоская кривая $S$, множество $S^1$ концов которой гомеоморфно $H$.

Для построения используется кривая $\Delta$, лежащая в полуплоскости $y \leqslant 0$ плоскости $(x, y)$, множество концов которой есть канторово совершенное множество $C$, лежащее на отрезке $[0,1]$ оси $OX$. Далее, произвольно выбранное множество $H$, удовлетворяющее условиям 1) и 2), топологически погружается в $C$ (на основании известной теоремы Урысона): $h(H) = L \subset C$. Нульмерное множество $C \setminus L$ типа $F_\sigma$ представляют в виде суммы компактов: $C \setminus L = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества $F_n$ попарно не пересекаются и диаметр множества $F_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Затем для каждой точки $x = (x, 0) \in F_n$ строят: отрезок $l(x)$ с концами $(x, 0)$ и $(x, 1/n)$ и окружность $Q(x)$ с центром в точке $(x, 1/n + r_n)$ радиуса $r_n$. Доказывается, что если подходящим образом выбрать последовательность $\{r_n\}$, то множество $M$, составленное из $C$, отрезков $l(x)$ и окружностей $Q(x)$, нульмерно во всех точках множества $L$. Поэтому множество $M \cup \Delta = S$ есть искомая кривая, множество концов которой совпадает с $L = h(H)$.

Вызывает недоумение допущенная авторами историческая ошибка: авторы приписывают введение понятия размерности Менгеру. Как известно, автором этого и смежных понятий, равно как и основ теории размерности, является П. С. Урысон.

*А. Л. Луиц*

**131. О тканях на плоскости.** Хамстром (Concerning webs in the plane. Hamstrom Mary-Elizabeth), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 500—513 (англ.)

Континуум $M$ автор называет $W_n$-множеством при $(n > 1)$, если существует $n$ непрерывных разбиений континуума $M$, удовлетворяющих условиям: 1) каждый элемент разбиения есть континуум, а каждое пространство разбиения — простая дуга и 2) любые $n$ элементов, взятых по одному из каждого разбиения, имеют непустое пересечение, и это пересечение вполне несвязно. Если все разбиения вполне непрерывны, а все элементы разбиений — простые дуги, то $W_n$-множество называется $W_n^s$-множеством. Любое $W_2$-множество является так называемой «простой тканью» (Bing R. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **60**, 133—148). $W_1$-множество автор определяет несколько иначе и лишь для плоских континуумов.

В реферируемой работе исследуются плоские $W_n$- и $W_n'$-множества. Среди различных результатов отметим следующие: доказано, что каждый плоский континуум, состоящий из простой замкнутой линии и ограниченной ею области, есть (при любом $n$) $W_n$-множество; приведен пример плоского $W_2$-множества, не являющегося $W_3$-множеством; дано необходимое и достаточное условие того, чтобы плоский континуум был $W_2'$-множеством.

*И. А. Вайнштейн*

**132. Об одном основном топологическом свойстве евклидовой плоскости.** Куратовский (Sur une propriété topologique fondamentale du plan Euclidien. Kuratowski Casimir), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 361—362 (франц.)

Статья примыкает к работе Гжегорцика и Куратовского (РЖМат, 1954, 4369). Рассматриваются нормальные связные локально связные топологические пространства, обладающие следующим свойством Янишевского: если $A$ и $B$ — такие связные замкнутые множества, что дополнение их суммы связно, то пересечение множеств $A$ и $B$ также связно. Доказывается инвариантность свойства Янишевского по отношению к монотонным непрерывным отображениям (непрерывное отображение называется монотонным, если полный прообраз любого связного множества связен).

*А. С. Пархоменко*

**133. Неподвижные точки вращающегося континуума.** Рейфенберг (Fixed points on rotating continua. Reifenberg E. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 1—7 (англ.)

Статья примыкает к работе Картрайта и Литлвуда «Некоторые теоремы о неподвижных точках» (Cartwright M. L., Littlewood J. E., Ann. Math., 1951, **54**, 1—37). Доказывается следующая теорема: пусть $I$ — ограниченный плоский континуум, дополнение которого есть связное открытое множество $\mathfrak{C}(I)$. Пусть далее $\mathfrak{F}$ — гомеоморфное отображение плоскости на себя, оставляющее инвариантным континуум $I$. Предположим, что ни один простой конец области $\mathfrak{C}(I)$ не остается неподвижным при отображении $\mathfrak{F}$, тогда как граница континуума $I$ имеет неподвижную точку $P$. Если $\mathfrak{P}$ — какой-нибудь простой конец области $\mathfrak{C}(I)$, содержащий точку $P$, и $C$ — какая-нибудь кривая в $\mathfrak{C}(I)$, сходящаяся к $\mathfrak{P}$, так что $P \in \overline{C}$, то все неподвижные точки континуума $I$ принадлежат или множеству $I \cap \overline{C}$, или одной из дополнительных внутренних областей этого множества.

*А. С. Пархоменко*

**134. Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, не разрезающего никакой области этого пространства.** Ситников К., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 6, 1007—1010

Строится такое двумерное множество $A$ в трехмерном евклидовом пространстве, что каков бы ни был шар $U$ и две точки, лежащие в $U \setminus A$, существует связывающий их континуум, также лежащий в $U \setminus A$. При этом множество $A$ есть множество типа $G_\delta$. Таким образом, получила отрицательное решение известная задача, поставленная Урысоном еще в 1922 г. Существенным элементом в построении множества

$A$ является операция, называемая автором «включением соленоида в данную ломаную». Операция эта заключается в следующем. Пусть $pq$ — одно из прямолинейных звеньев данной ломаной $\lambda$. Берем шар $V$ с центром $o$ в середине отрезка $pq$ и радиусом, меньшим, чем половина расстояния от точки $o$ до всех остальных звеньев ломаной. Внутри шара $V$ берем соленоид $\Sigma$ и на нем две точки неприводимости $p''$, $q''$, т. е. точки, которые в $\Sigma$ не могут быть соединены никакой простой дугой. Обозначая через $p'$, $q'$ точки пересечения границы шара $V$ с отрезком $pq$, проводим в $V$ простые дуги $p'p''$ и $q'q''$, не имеющие общих точек ни между собою, ни с соленоидом, кроме соответственно точек $p''$ и $q''$. Включение соленоида в ломаную $\lambda$ заключается в том, что прямолинейный отрезок $p'q'$ этой ломаной заменяется континуумом, составленным из дуги $p'p''$, соленоида $\Sigma$ и дуги $q''q'$. Множество $A$ строится теперь следующим образом. Берем шар $W$ радиуса 100 с центром в начале координат. Все дальнейшие построения проходят внутри этого шара. Рассмотрим лежащие в $W$ ребра и куски ребер 1-кубильяжа пространства (т. е. кубильяжа, состоящего из кубов с ребром 1). В каждое из лежащих внутри $W$ ребер этого кубильяжа включаем соленоид так, чтобы полученные после этого включения «ребра» ранга 1 попарно не имели общих точек, кроме, быть может, общих концов. Сумму «ребер» ранга 1 обозначим через $Q_1$. Предположим, что построено множество $Q_k$, являющееся суммой конечного числа «ребер» ранга $\leqslant k$; каждое «ребро» есть ломаная с включенным в нее соленоидом. На $Q_k$ берем конечное множество $N_k$, образующее $1/k$-сеть на каждом «ребре» ранга $\leqslant k$; берем столь малое $\delta_k > 0$, чтобы каждая точка множества $N_k$ отстала от не содержащих ее «ребер» больше чем на $\delta_k$; строим $\delta_k/8$-кубильяж и, слегка сдвинув его вершины, заменяем его ребра (без увеличения их диаметра) ломаными так, чтобы они не имели общих точек с $Q_k$ и пересекались лишь в общих концах. В каждую из этих ломаных включаем соленоид так, чтобы полученные «ребра» не имели точек пересечения ни между собою (кроме как в надлежащих концах), ни с $Q_k$. Каждое из возникающих таким образом «ребер» назовем «ребром» ранга $k+1$. Каждую точку множества $N_k$ соединяем с одним из ближайших к ней концов какого-либо из построенных «ребер» ранга $k+1$ ломаной диаметра $<\delta_k/4$; в каждую из этих ломаных включаем соленоид и все это делаем так, чтобы полученные новые «ребра», которые также называем «ребрами» ранга $k+1$, попарно не пересекались ни между собою, ни с ранее построенными, кроме как в надлежащих концах. Сумму всех «ребер» ранга $\leqslant k+1$ обозначаем через $Q_{k+1}$. Это построение продолжаем по индукции бесконечно. Сумму всех $Q_k$, $k=1, 2, 3, \ldots$ обозначаем через $B$ и полагаем $A = R^3 \setminus B$.

Обычными методами теоретико-множественной топологии доказывается, что множество $B$ равномерно локально связно, что и означает, что $A$ не разрезает никакого шара и, следовательно, вообще никакой области трехмерного пространства. Доказательство двумерности множества $A$, наоборот, очень трудно и опирается на глубокие гомологические характеристики размерности незамкнутых множеств, ранее данные автором. *П. С. Александров*

135. **Построение нульмерного компакта метрического порядка $n$.** **Боровиков В. А.**, Матем. сб., 1954, **34 (76)**, № 2, 279—288

Работа содержит отрицательное решение вопроса о том, всякий ли криволинейный полиэдр является метрически правильным. Порядком $\sigma_a$ точки $a$ компактного метрического пространства $\Phi$ относительно конечного множества $M \subset \Phi$ называется число точек $b \in M$, для которых $\rho(a, b) = \rho(a, M)$. Максимум числа $\sigma_a$ при $a \in \Phi$ обозначим через $\sigma(M)$. Метрическим порядком $\omega\Phi$ компакта $\Phi$ называется наименьшее из таких натуральных чисел $k$, что для любого $\varepsilon > 0$ в $\Phi$ имеется $\varepsilon$-сеть $M$, для которой $\sigma(M) \leqslant k$. Понятие метрического порядка введено П. С. Александровым (Ann. Math., 1928, **30**, 101—187). Основные теоремы, относящиеся к этому понятию, доказаны К. А. Ситниковым (Докл. АН СССР, 1949, **67**, № 2, 229 — 232).

Для любого полиэдра $\Phi$ имеет место равенство $\omega\Phi = \dim \Phi + 1$. Автор показывает, что для криволинейных полиэдров это свойство (называемое метрической правильностью) не сохраняется. Именно, в работе построен пример нульмерного компакта метрического порядка $n$ для любого $n > 0$. Компакт этот расположен в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$, причем кривая, содержащая этот компакт, также имеет метрический порядок $n$. Автор ставит следующие вопросы: 1) существует ли в пространстве $R^n$ компакт размерности, меньшей чем $n$, имеющий метрический порядок $n+1$? 2) пусть $\Phi \subset R^n$; всегда ли существует в $R^n$ метрически правильный компакт, гомеоморфный компакту $\Phi$?

В формулировке леммы 1 допущена неточность: не указано, что компакт $F_1$, существование которого утверждается в лемме, имеет размерность нуль. Без этого лемма становится бессодержательной.

*В. Г. Болтянский*

136. **Сети, удовлетворяющие условию минимальности.** **Льюс** (Networks satisfying minimality conditions. Luce R. Duncan), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 825—838 (англ.)

Сетью $N$ автор называет конечный ориентированный граф с множеством вершин $M$ и множеством ребер $P$, в котором для любой упорядоченной пары вершин $a \in M$, $b \in M$ существует не более одного ребра $(a, b) \in P$ с началом в точке $a$ и концом в $b$ (см., например, Кудрявцев Л. Д., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 4 (26), 80—118). Автор рассматривает только нерефлексивные сети, т. е. сети, не содержащие замкнутых ребер $(a, a)$. Через $p(N)$ обозначается число ребер сети $N$. Сеть $N'$, получающаяся присоединением к $N$ некоторого конечного числа ребер $(a, b) \notin P$, $a \in M$, $b \in M$, называется надсетью. Связная сеть $N$ определяется как сеть, в которой любые две вершины $a \in M$ и $b \in M$ могут быть соединены цепочкой ребер $(a, c_1) \in P$, $(c_1, c_2) \in P, \ldots, (c_n, b) \in P$, называемой $n$-цепью. Сеть $N$ степени $(-k)$, $k \geqslant 0$, определяется как сеть, для которой существует такая связная надсеть $N'$, что $p(N') - p(N) = k+1$, причем каждая надсеть $N''$.

для которой $p(N'') - p(N) < k+1$, несвязна. Сеть $N$ называется 0-минимальной, если $N$ несвязна, но добавление к ней любого ребра приводит к связной сети. Сеть $N$ называется $(-k)$-минимальной, $k \geqslant 1$, если в результате добавления к $N$ любого ребра $(a, b) \notin P$, $a \in M$, $b \in M$, получается сеть степени $(-k+1)$. Первая теорема устанавливает структуру $(-k)$-минимальных сетей. При помощи рассмотрения подсетей аналогичным образом вводится понятие сети степени $k$ и $k$-минимальной сети для $k > 0$. Доказывается, что если сеть $N$ имеет степень $k > 0$, то для любой упорядоченной пары вершин $a$ и $b$ существует по крайней мере $k$ различных цепей с началом в $a$ и концом в $b$, причем каждые две цепи не имеют общих ребер. Изучается структура и некоторых других классов сетей (например, $h$-транзитивных). *Л. Д. Кудрявцев*

**137. Кодирование деревьев. Невилл** (The codifying of tree-structure. Neville E. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 3, 381—385 (англ.)

Деревом называется связный одномерный ациклический комплекс. Дерево с $n$ вершинами назовем нумерованным (термин референта), если его вершины занумерованы натуральными числами от 1 до $n$. Автор устанавливает тремя способами взаимно однозначное соответствие между множеством всех нумерованных деревьев с $n$ вершинами и множеством последовательностей $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$, где $p_1, \ldots, p_{n-2}$ — натуральные числа, не превосходящие $n$. Отсюда непосредственно вытекает принадлежащая Кэли теорема о том, что число различных нумерованных деревьев с $n$ вершинами равно $n^{n-2}$. Простейший из трех приведенных способов установления взаимно однозначного соответствия заключается в следующем. Обозначим через $q_1$ наименьшее натуральное число, отличное от всех чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$; через $q_2$ — наименьшее натуральное число, отличное от всех чисел $q_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$; через $q_3$ — наименьшее натуральное число, отличное от всех чисел $q_1, q_2, p_3, \ldots, p_{n-2}$, и т. д. Определив таким образом числа $q_1, \ldots, q_{n-1}$, поставим в соответствие последовательности $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$ дерево, вершинами которого служат числа $1, 2, \ldots, n$ и в котором содержатся следующие отрезки: $[q_1, p_1]$, $[q_2, p_2], \ldots, [q_{n-2}, p_{n-2}]$, $[q_{n-1}, n]$.

В работе приведены примеры. *В. Г. Болтянский*

**138. Пространства траекторий конечных групп преобразований. Флойд** (Orbit spaces of finite transformation groups. I. Floyd E. E.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 563—567 (англ.)

Изучается пространство $Y$ траекторий конечной группы симплициальных гомеоморфизмов конечного симплициального комплекса $X$. Доказано, что если комплекс $X$ гомологически тривиален (относительно группы целых чисел), то и пространство $Y$ гомологически тривиально. Если комплекс $X$ стягиваем в точку, то и $Y$ обладает этим же свойством. Доказательство состоит в сведении к случаю, когда группа преобразований разрешима. Для этого случая теорема уже была доказана автором ранее (Amer. J. Math., 1951, **73**, 363—367). *М. М. Постников*

**139. Теория неподвижных точек в топологических многообразиях. Вейер.** (Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten. Weier Josef), Math. Z., 1953, **59**, № 2, 171—190 (нем.)

Работа содержит доказательства нескольких теорем, которые хорошо известны для полиэдров и обобщаются автором на случай компактных топологических многообразий, не предполагаемых триангулируемыми. В первом разделе доказана аппроксимационная теорема о неподвижных точках, заключающаяся в том, что всякое отображение $f$ компактного многообразия в себя можно произвольно малым сдвигом перевести в такое отображение $f'$, которое имеет лишь конечное число неподвижных точек. Аналогичная теорема для случая полиэдров принадлежит Хопфу (Hopf H., Math. Z., 1929, **29**, 493—524).

Во втором разделе напоминаются понятия индекса и алгебраического числа неподвижных точек; далее приводится (также для случая компактных многообразий) теорема о том, что алгебраическое число неподвижных точек является гомотопическим инвариантом отображения. При доказательстве автор опирается на следующую теорему: если $f_0$ и $f_1$ — гомотопные между собой и имеющие лишь конечное число неподвижных точек отображения компактного многообразия в себя, то соединяющая их деформация $f_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, может быть выбрана таким образом; что все отображения $f_t$ имеют лишь конечное число неподвижных точек. В реферируемой работе эта теорема только сформулирована; доказательство ее автор предполагает привести «в другом месте».

Наконец, третий раздел посвящен обобщению теорем Нилсена и Рейдемайстера о классах неподвижных точек (Nielsen J., Acta math., 1927, **50**, 189—358; 1929, **53**, 1—76; Reidemeister K., Math. Ann., 1936, **112**, 586—593). Пусть $p$ и $q$ — изолированные неподвижные точки отображения $f$ пространства $Q$ в себя и $M$ — открытое множество пространства $Q$, содержащее точки $p$ и $q$ и не содержащее других неподвижных точек отображения $f$. Точки $p$ и $q$ называются точками одного и того же класса Нилсена — Рейдемайстера относительно $M$, если их можно соединить в $M$ таким путем $a$, что пути $a$ и $f(a)$ гомотопны в $M$ при неподвижных концевых точках. Автор доказывает, что если $Q$ есть компактное многообразие размерности $\geqslant 3$, то $f$ можно продеформировать, не меняя его на $Q \setminus M$, в такое отображение $f'$, которое имеет внутри $M$ единственную неподвижную точку. *В. Г. Болтянский*

**140. От большановской теоремы о корнях до алгебраической гомотопической теории сфер. Хопф** (Vom Bolzanoschen Nullstellensatz zur algebraischen Homotopietheorie der Sphären. Hopf H.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver. (Abt. I), 1953, **56**, № 2—3, 59—76 (нем.)

Доклад, прочитанный на заседании Немецкого математического общества в сентябре 1951 г. Исходной точкой является известная теорема Больцано о том, что действительная непрерывная функция, заданная на отрезке и принимающая на его концах значения разных знаков, имеет на этом отрезке хотя бы один корень. Автор дает условию этой теоремы многомерную формулировку: на единичной сфере $S^m$ евклидова $(m+1)$-мерного пространства задано $n+1$ действительных функций, ни в одной

точке сферы не обращающихся одновременно в нуль. Ставится вопрос: можно ли продолжить эти функции на весь шар $E$, ограниченный сферой $S^m$, таким образом, чтобы ни в одной точке шара $E$ эти функции не обращались одновременно в нуль. Вопрос этот легко сводится к следующему: будет ли гомотопно нулю заданное отображение $m$-мерной сферы $S^m$ в $n$-мерную сферу $S^n$? Далее следует весьма полный обзор относящихся сюда результатов, начиная от классических работ Хопфа, Гуревича, Понтрягина и кончая новейшими результатами по гомотопической теории, полученными французскими математиками (Серр, Картан). *В. Г. Болтянский*

141. **Об операциях соединения в гомотопических группах. Баррат, Хилтон** (On join operations in homotopy groups. Barratt M. G., Hilton P. J.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 12, 430—445 (англ.)

Изучаются соотношения между различными операциями в гомотопических группах. Особое внимание уделено следующей операции «соединения».

Пусть $A$, $B$ — топологические пространства. Их соединением $A*B$ называется пространство, получающееся из топологического произведения $A\times B\times I$, где $I$ — единичный отрезок, при помощи отождествления точек $(a, b, 0)$ с точкой $a\in A$ и точек $(a, b, 1)$ — с точкой $b\in B$. Пусть $f: A\to A'$, $g: B\to B'$ — непрерывные отображения. Их соединением $f*g$ называется отображение $A*B\to A'*B'$, которое получается после отождествления из отображения $h: A\times B\times I\to A'\times B'\times I$, определенного формулой $h(a, b, t) = (f(a), g(b), t)$. Если $A = S^{p-1}$, $B = S^{q-1}$, то $A*B = S^{p+q-1}$.

Таким образом операция соединения отображений (очевидно, гомотопически инвариантная) порождает соединение $\alpha*\beta\in\pi_{p+q-1}(A*B)$ элементов $\alpha\in\pi_{p-1}(A)$, $\beta\in\pi_{q-1}(B)$. Операция соединения подробно изучалась Уайтхедом (Whitehead G. W., Ann. Math., 1950, **51**, 192—238), и Ху Сы-цзэнь (Hu Sze-tsen, Fundam. math., 1949, **36**, 23—34). Известно, что она билинейна и перестановочна с операцией композиции (т. е. если $\alpha\in\pi_{p-1}(S^{m-1})$, $\beta\in\pi_{q-1}(S^{n-1})$, $\alpha'\in\pi_{m-1}(A)$, $\beta'\in\pi_{n-1}(B)$, то $(\alpha'*\beta')\circ(\alpha*\beta) = (\alpha'\circ\alpha)*(\beta'\circ\beta)$). Если $A = S^{m-1}$, $B = S^{n-1}$, то операция соединения ассоциативна и ее делителями нуля являются все произведения Уайтхеда. Эта теорема, принадлежащая Ху Сы-цзэнь, немедленно вытекает из следующей формулы авторов: $\alpha*\beta = (-1)^{m(n+q)}E^m\beta\circ E^q\alpha = (-1)^{p(n+q)}\times E^n\alpha\circ E^p\beta$ (где $E$ обозначает гомоморфизм надстройки Фрейденталя). Отсюда же вытекает формула $\beta*\alpha = (-1)^{pq+mn}\alpha*\beta$ и другие формулы того же типа. Как доказал Уайтхед (см. цитированную выше работу), если $\gamma\in\pi_m(X)$, $\delta\in\pi_n(X)$, то $[\gamma, \delta]\circ(\alpha*\beta) = (\gamma\circ E\alpha, \delta\circ E\beta]$. Применяя это соотношение, авторы изучают гомотопические группы букетов сфер.

Оказывается, что соединение элементов гомотопических групп является надстройкой над результатом некоторой другой операции, которую авторы называют операцией редуцированного соединения. Пусть $\alpha\in\pi_p(S^m)$, $\beta\in\pi_q(S^n)$ и $f\in\alpha$, $g\in\beta$. Обозначим через $\theta_{p,q}$ произвольное отображение пары $(S^p\times S^q, S^p\cup S^q)$ в пару $(S^{p+q}, z_0)$, где $z_0 = (0, \ldots, 0, 1)$. Класс отображения $h = S^{p+q}\to S^{m+n}$, определенного формулой $h\theta_{p,q} = \theta_{m,n}(f\times g)$, зависит только от $\alpha$ и $\beta$. Этот класс называется редуцированным соединением элементов $\alpha$ и $\beta$ и обозначается через $\alpha\times\beta$. Оказывается, что $\alpha\times\beta = (-1)^{m(n+q)}E^m\beta\circ E^q\alpha = (-1)^{p(n+q)}E^n\alpha\circ E^p\beta$, так что $\alpha*\beta = (-1)^{n+q}\times E(\alpha\times\beta)$. Редуцированное соединение $\alpha\times\beta$ тесно связано с произведением Уайтхеда $[\alpha, \beta]$. Эта связь позволяет авторам получить некоторые свойства гомоморфизма $P$ (РЖМат, 1954, 5488). В заключение статьи авторы при помощи операции редуцированного соединения вычисляют некоторые обобщенные инварианты Хопфа. *М. М. Постников*

142. **Замечания к одной гомотопической проблеме. Бургер** (Bemerkungen zu einem Homotopieproblem. Burger Ewald), Arch. Math., 1953 **4**, № 5—6, 470—476 (нем.)

Излагаются некоторые соображения автора о $\nabla$-цикле препятствия, возникающего при непрерывном отображении $n$-мерного локально конечного комплекса в пространство, асферичное в размерностях $< n$. Рассматриваются также возникающие при отображении гомоморфизмы $\nabla$- и $\Delta$-групп гомологий. *Р. В. Гамкрелидзе*

143. **О некоторых теоремах Дж. Уайтхеда. Уайтхед.** (On certain theorems of G. W. Whitehead. Whitehead J. H. C.), Ann. Math., 1953, **58**, № 3, 418—428 (англ.)

Исправляются три ошибки в знаках, допущенные Дж. Уайтхедом. В связи с этим рассмотрен вопрос об исключении в теории гомотопических групп понятия ориентации. Автор дает основным понятиям этой теории естественные определения, не содержащие произвола в выборе ориентации. *М. М. Постников*

144. **$\nabla$-гомологии Александера — Чеха произвольного топологического пространства с коэффициентами из пучка. Приложения. Дэвель** (Cohomologie d'Alexander-Cech à coefficients dans un faisceau sur un espace topologique quelconque. Applications. Deheuvels René), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 10, 1089—1091 (франц.)

Говорят, что над топологическим пространством $X$ задан пучок $A$-алгебр (РЖМат, 1953, 127), если: 1) каждому открытому множеству $U\subseteq X$ отнесена некоторая $A$-алгебра $B(U)$; 2) каждой паре открытых множеств $U$, $V$, удовлетворяющей условию $U\subseteq V$, отнесен гомоморфизм $f_{VU}: B(V)\to B(U)$; 3) из включения $U\subseteq V\subseteq W$ следует $f_{WU} = f_{VU}\cdot f_{WV}$.

В заметке определяются группы $\nabla$-гомологий произвольного топологического пространства с коэффициентами из пучка. Формулируется теорема о существовании спектральной последовательности (РЖМат, 1953, 127) непрерывного отображения произвольного топологического пространства $X$ в произвольное топологическое пространство $Y$ (рассматриваются гомологии Александера — Чеха и сингулярные гомологии). Этот результат является обобщением теоремы Лере о существовании спектральной последовательности отображений локально бикомпактных пространств (Leray J., J. math. pures et appl., 1950, **29**, 1—139).

Доказательств заметка не содержит. *А. С. Шварц*

**145. Квадратичные формы и инварианты зацепления узлов. Кнезер, Пуппе** (Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten. Kneser Martin, Puppe Dieter), Math. Z., 1953, 58, № 4, 376—384 (нем.)

Дистрибутивное, коммутативное умножение, определенное в абелевой группе $G$, результат которого принадлежит фактор-группе аддитивной группы рациональных чисел по подгруппе целых чисел, называется примитивным зацеплением, если нуль группы $G$ является единственным полным делителем нуля этого умножения (т. е. для любого элемента $a \neq 0$ группы $G$ существует такой элемент $b \neq 0$, что $ab \neq 0$). Группа, в которой определено примитивное зацепление, называется группой с зацеплением. Любая группа с зацеплением и с конечным числом образующих конечна. Пусть $a$ — некоторая (конечная) система образующих группы $G$ с зацеплением. Рассматривая $a$ как однострочечную матрицу, построим матрицу $aa'$. Перейдя к представителям, из матрицы $aa'$ получим симметрическую матрицу $A$ с рациональными элементами, определенными с точностью до сравнения mod 1. Матрица $A$ называется матрицей зацеплений группы $G$. Она полностью определяет эту группу. Оказывается, что любая симметрическая матрица $A$ с рациональными коэффициентами определяет некоторую группу $G(A)$ с зацеплением, для которой она является матрицей зацеплений.

Матрица зацеплений зависит от выбора системы образующих, так что одна и та же группа имеет, вообще говоря, много матриц зацеплений. Оказывается, что все они эквивалентны в том смысле, что от одной матрицы можно перейти к другой конечным числом преобразований вида

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \to S'AS$$

($S$ — произвольная унимодулярная матрица с целыми коэффициентами) и преобразований, им обратных. Авторы указывают (без доказательства), что любая группа с зацеплением обладает матрицей зацеплений, для которой обратная матрица имеет целые коэффициенты.

Основной результат авторов состоит в том, что если для двух матриц $A$ и $B$ нечетного порядка с целыми коэффициентами группы $G(A)$ и $G(B)$ изоморфны, то матрицы $A$ и $B$ эквивалентны. Указано также, что это предложение остается справедливым и для матриц четного порядка. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между группами с зацеплением и классами эквивалентности симметрических матриц (т. е. квадратичных форм) с целыми коэффициентами. Примером группы с зацеплением может служить $(2n+1)$-мерная группа кручения ориентируемого $(4n+3)$-мерного многообразия. В частности, группой с зацеплением является одномерная группа гомологий двулистного накрытия дополнительного пространства некоторого (полигонального) узла $k$; как доказано Зейфертом (Seifert H., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl., 1933, **26**, 811—828), эта группа конечна.

Рассмотрим некоторую проекцию узла $k$ на плоскость, причем предположим эту проекцию регулярной (имеющей только двойные точки) и нормированной (для любой двойной точки один из отрезков, проходящих через эту точку, назван «нижним», а другой — «верхним»). Области, на которые эта проекция разбивает плоскость, закрасим белым и черным цветом, так чтобы бесконечная область имела черный цвет и чтобы любые две смежные области имели различные цвета. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — все конечные черные области. Двойной точке $x$, в которой сходятся две различные черные области, отнесем коэффициент $+1$, если «верхний» отрезок узла, проходящий через эту точку, можно повернуть против часовой стрелки в «нижний», не выходя за пределы черных областей. В противном случае точке $x$ отнесем коэффициент $-1$. Если к точке $x$ с двух сторон подходит одна и та же черная область, то этой точке отнесем коэффициент 0. Обозначив через $a_{ii}$ сумму всех коэффициентов двойных точек, принадлежащих области $G_i$, а через $a_{ij}\,(i \neq j)$ взятую с противоположным знаком сумму всех коэффициентов двойных точек, принадлежащих одновременно областям $G_i$ и $G_j$, получим симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$, называемую матрицей узла $k$. Гёриц (Goeritz L., Math. Z., 1933, **36**, 647) доказал, что при деформации узла и при изменении проекции матрица $A$ переходит в эквивалентную, а Зейферт (цит. выше статья), — что матрица $A$ есть матрица зацеплений одномерной группы гомологий двулистного накрытия дополнительного пространства узла. Таким образом, эта группа гомологий однозначно определяется матрицей узла (или, как авторы предпочитают говорить, квадратичной формой узла).

*М. М. Постников*

**146. Об одном классе компактных комплексных многообразий, не являющихся алгебраическими. Калаби, Экман** (A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. Calabi Eugenio, Eckmann Beno), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 494—500 (англ.)

Основным результатом работы является следующая теорема: Прямое произведение $(2p+1)$-мерной сферы $S^{2p+1}$ на $(2q+1)$-мерную сферу $S^{2q+1}$ допускает комплексно-аналитическое расслоение с двумерными торами данного конформного типа в качестве слоев и с базой, являющейся прямым произведением $P_p \times P_q$ двух комплексных проективных пространств $P_p$ и $P_q$ размерностей $p$ и $q$ соответственно (теорема 2).

Полученное комплексно-аналитическое многообразие обозначается через $M_{p,q}$. Из способа построения многообразия $M_{p,q}$ непосредственно следует, что слои, являющиеся аналитическими кривыми в $M_{p,q}$, гомологичны нулю в $M_{p,q}$, и, следовательно, комплексно-аналитическое многообразие $M_{p;q}$ не является келеровым (теорема 3). Кроме того, из основной теоремы непосредственно вытекают следующие результаты:

Всякое компактное комплексное подмногообразие многообразия $M_{p,q}$ состоит из всех точек, которые проектируются на некоторое алгебраическое подмногообразие базисного пространства $P_p \times P_q$; следовательно, оно также расслаивается на торы (теорема 4).

Пусть $a \in S^{2p-1}$, $a' \in S^{2q-1}$. Тогда область $E_{p,q} = (S^{2p-1} \setminus a) \times (S^{2q-1} \setminus a') \subset M_{p,q}$, гомеоморфная $2(p+q-1)$-мерному открытому шару, не допускает

при $q > 0$ келеровой метрики; кроме того, $\mathbf{E}_{p,q}$ не может быть перекрыто одной координатной окрестностью, и всякая голоморфная на $\mathbf{E}_{p,q}$ функция является постоянной (теорема 6).

Доказательство основной теоремы опирается на следующее расслоение нечетномерной сферы на окружности. Пусть $\mathbf{E}^{p+1}$ — комплексное векторное пространство размерности $p+1$. Каждая комплексная прямая из $\mathbf{E}^{p+1}$ пересекается с единичной сферой $\mathbf{S}^{2p+1} \subset \mathbf{E}^{p+1}$ по большой окружности. Множество всех таких прямых, образующих комплексное $p$-мерное проективное пространство $\mathbf{P}_p$, и дает расслоение сферы $\mathbf{S}^{2p+1}$ на окружности с базисным пространством $\mathbf{P}_p$. Прямое произведение $\mathbf{S}^{2p+1} \times \mathbf{S}^{2q+1}$ расслоенных таким образом сфер $\mathbf{S}^{2p+1}$ и $\mathbf{S}^{2q+1}$ естественно расслаивается на двумерные торы $\mathbf{T}^2$ с $\mathbf{P}_p \times \mathbf{P}_q$ в качестве базисного пространства. Каждый слой $\mathbf{T}^2$ следующим образом снабжается комплексной структурой. Если проекцией $T^2$ на $\mathbf{P}_p \times \mathbf{P}_q$ является точка $(z_0, \ldots, z_p) \times (z_0', \ldots, z_q') \in \mathbf{P}_p \times \mathbf{P}_q$, где $z_\alpha z_\beta' \neq 0$ и $|z_0|^2 + \cdots + |z_p|^2 = |z_0'|^2 + \cdots + |z_q'|^2 = 1$, то $\mathbf{T}^2$ униформизируется при помощи координаты

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}(\log z_\alpha + \tau \log z_\beta') \bmod (1, \tau),$$

где $\operatorname{Im}(\tau) \neq 0$. Легко проверить, что введенные таким образом в $\mathbf{S}^{2p+1} \times \mathbf{S}^{2q+1}$ комплексные координаты удовлетворяют всем условиям основной теоремы. *Р. В. Гамкрелидзе*

**147 Д. Непрерывные образы гильбертова пространства. Хухунайшвили Г. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

**См. также:** 149, 189, 205, 350, 418

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**148. К тринадцатой проблеме Гильберта. Витушкин А. Г.**, Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 4, 701—704

Для любых $n > 2$ и $l \geqslant 1$ строится функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ $n$ переменных с непрерывными частными производными до $l$-го порядка включительно, не представимая в виде конечной суперпозиции функций меньшего числа переменных, каждая из которых дифференцируема до $l-1$-го порядка включительно, причем $l$-е частные производные удовлетворяют условию Липшица. Основной пункт при разыскании такой функции заключается в следующем:

Пусть имеется $m$ многочленов от $q$ переменных степени не выше $r$ по каждому из переменных. Эти многочлены осуществляют отображение $\varphi$ $q$-мерного пространства $R_q$ в $m$-мерное пространство $R_m$. Если $m$ достаточно велико по сравнению с $q$ и $r$ ($2^m > [16(q+1)]^q \cdot (6r)^{3q} \cdot q m^q$), то образ $\varphi(R_q)$ пространства $R_q$ при этом отображении представляет собой «редкое» множество в пространстве $R_m$ (сдвигаясь из любой точки $R_m$ по каждой из осей в какую-то сторону на $1/4$, мы попадем в центр куба со стороной $1/4$, не содержащего ни одной точки из $\varphi(R_q)$). Эта лемма позволяет построить последовательность функций $n$ переменных, сходящуюся к функции нужной гладкости, каждая из которых вместе с некоторой своей окрестностью в пространстве $C$ не есть суперпозиция возрастающей кратности многочленов возрастающей степени. Используя теоремы приближения функций многочленами, автор показывает, что предельная функция и есть искомая. *Е. М. Ландис*

**149. О суммируемости якобиана. Кудрявцев Л. Д.**, Матем. сб., 1953, **33 (75)**, № 2, 389—398

Рассматриваются дифференцируемые отображения $y = f(x)$ области $G$ $n$-мерного пространства $E_x^n$ в $n$-мерное пространство $E_y^n$ (Кудрявцев Л. Д., Матем. сб., 1953, **32 (74)**, 493—514). Пусть $J(x)$ — якобиан этого отображения. Отображение называется компактным (слабо монотонным), если полный прообраз каждой точки $y \in f(G)$ есть компакт (связное множество). Псевдократностью отображения на множестве $E \subset G$ называется наименьшее кардинальное число, не меньшее мощности каждого множества $f^{-1}(y) \cap E$, где $y \in f(E) \setminus f(G_0)$, $G_0 = \mathcal{E}_{x \in G}\{J(x) = 0\}$. Псевдократность на любом компакте $\Phi \subset G$ не более чем счетна.

Доказывается, что для псевдооднократного на $G$ отображения и любого измеримого $E \subset G$

$$\int |J(x)|\, dE = \operatorname{mes} f(E).$$

Это справедливо и для слабо монотонных отображений, ибо в этом случае полный прообраз почти каждой точки множества $f(G)$ состоит из одной точки. Следовательно, для суммируемости на $E$ якобиана слабо монотонного отображения необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{mes} f(E) < \infty$.

Доказывается, что если отображение имеет конечную псевдократность на каждом компакте $\Phi \subset G$ (в частности, если отображение компактное ориентированное), то якобиан суммируем на каждом компакте $\Phi \subset G$. *П. И. Романовский*

**150. Дифференцируемые отображения $n$-мерных областей и гармонические отображения плоских областей. Кудрявцев Л. Д.**, Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2 (60), 207—209

Для дифференцируемого отображения $f$ области $G$ $n$-мерного евклидова пространства $E^n$ в $E^n$ при $\alpha \geqslant 1$ следующим образом вводится $\alpha$-вариация $\bigvee_E^\alpha f$ отображения $f$ на множестве $E \subset G$:

$$\bigvee_E^\alpha f = \sup_\tau \sum_i \frac{\operatorname{mes}^\alpha f(E_i)}{\operatorname{mes}^{\alpha-1} E_i},$$

где $\tau$ — подразделение $E$ на попарно не пересекающиеся измеримые множества $E_i$.

Для нее приводится равенство

$$\bigvee_E^{\alpha} f = \int |I(x)|^{\alpha} dE,$$

где $I(x)$ — якобиан отображения $f$. Формулируется также ряд результатов (теоремы 5—7), обобщающих известные теоремы о точках плотности и о замене переменного интегрирования.

Остальные результаты (теоремы 8—13) опубликованы в отдельной заметке автора (РЖМат, 1954, 4448). *А. Я. Дубовицкий*

**151. Заметка по теории интеграла Римана. Расин** (A note on the theory of the Riemann integral. Racine C.), Math. Student, 1953, **21**, № 3, 4, 97—103 (англ.)

Доказывается несколько теорем об интегралах Римана. Все они известны, кроме следующей:

Пусть при каждом $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ интегрируема $(R)$ по $y$ на $[c, d]$. Если для почти всех $y$ из $[c, d]$ точки $(x_0, y)$ суть точки непрерывности функции $f(x, y)$, то $x_0$ есть точка непрерывности интеграла

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

*И. П. Натансон*

**152. Об интегральной теореме Гаусса и Стокса. Н. Криккеберг** (Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. II. Krickeberg Klaus). Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 35—60 (нем.)

Без применения методов комбинаторной топологии при весьма общих предположениях доказывается аналог интегральной теоремы Стокса для дифференциальных форм при отображениях ориентированных компактных многообразий. Результаты автора представляют собою развитие и обобщение соответствующих результатов Посселя (Possel R. de, Bull. Soc. math. France, 1938, сер 2, **62**, 262—271) и Штоля (Stoll W., Math. Z., 1952, **57**, 116—154).

В §§ 1—4 строится теория $n$-мерного многообразия, которое обозначается через $\mathfrak{N}$; определяются его носитель $N$ и граница многообразия $\partial\mathfrak{N}$ вводятся понятия дифференцируемости многообразия и его ориентируемости, изучаются функции на многообразиях и т. п.

В § 5 определяется касательное пространство $\mathfrak{T}(v)$ к многообразию в данной точке $v$ и доказывается, что размерность $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(v)$ равна размерности самого многообразия.

В § 6 изучаются дифференциальные формы многообразия, причем через $\mathfrak{T}_p$ обозначается пространство альтернированных линейных $p$-форм ($p = 0, 1, 2, \ldots$) над векторным пространством $\mathfrak{T}$ (Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948). Дифференциальной формой $\omega = \omega(v)$ степени $p$ многообразия $\mathfrak{N}$ с областью определения $K \subseteq N$, на которой многообразие дифференцируемо, называется всякое отображение $K$ в $\mathfrak{T}_p$. Изучаются представления дифференциальных форм через элементы пространства, дуального к пространству $\mathfrak{T}$, и преобразование дифференциальных форм при переходе к новой системе координат; вводится понятие дифференциала дифференциальной формы и доказываются различные свойства форм и их дифференциалов.

В § 7 вводится понятие интеграла $\int_K \omega$ от дифференциальной формы $\omega$ по измеримому множеству $K \subseteq V$, а в § 8 изучаются отображения $f$ $m$-мерного многообразия $\mathfrak{M}$ в $n$-мерное многообразие $\mathfrak{N}$ : $v = f(t)$. При этом показывается, что при соответствующих ограничениях на отображение $f$ оно порождает отображение $\mathfrak{F}$ дифференциальных форм многообразия $\mathfrak{N}$ в множество дифференциальных форм многообразия $\mathfrak{M}$. Здесь же определяется интеграл $^{(f)}\int_{f(K)} \omega$ от некоторой дифференциальной формы $\omega$ многообразия $\mathfrak{N}$ по образу $f(K)$ при отображении $f$ некоторого измеримого множества $K \subseteq N$. Этот интеграл зависит, вообще говоря, от

$$f : {}^{(f)}\int_{f(K)} \omega = \int_K \mathfrak{F}(\omega).$$

В § 9 доказывается основная теорема. Рассматривается $n$-мерное многообразие $\mathfrak{N}$, множество $K \subseteq N$, на котором $\mathfrak{N}$ обладает рядом свойств, в частности дважды дифференцируемо. На $K$ заданы дифференциальная форма $\omega$ степени $m - 1$, локально удовлетворяющая условию Липшица, и дифференциальная форма $\delta\omega$ степени $m$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Пусть $f$ — отображение (локально удовлетворяющее условию Липшица) носителя $M$ компактного, локально удовлетворяющего условию Липшица и ориентированного $m$-мерного многообразия $\mathfrak{M}$ на $K$; носитель многообразия $\partial\mathfrak{M}$ обозначается через $\partial M$ и полагается $\partial K = f(\partial M)$.

В предположении, что почти для всех $t \in M$ форма $\delta\omega(f(t))$ является дифференциалом от $\omega(t)$, доказывается равенство $^{(f)}\int_K \delta\omega = {}^{(f)}\int_{\partial K} \omega$, причем оба интеграла оказываются конечными.

*Л. Д. Кудрявцев*

**153. О корнях уравнения $f(x) = \xi$, где $f(x)$ — действительная непрерывная функция на $[a, b]$, не монотонная ни на каком подинтервале $[a, b]$. Падмавалли** (On the roots of equation $f(x) = \xi$ where $f(x)$ is real and continuous in $(a, b)$ but monotonic in no subinterval of $(a, b)$. Padmavally K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 839—841 (англ.)

Пусть $f(x)$ — действительная функция, заданная на сегменте $[a, b]$. Положим $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$ $(x \in [a, b])$, и пусть для $\xi \in [m, M]$ $S(\xi) = f^{-1}(\xi)$. Изучается расположение на $[m, M]$ множества тех $\xi$, для которых $S(\xi)$ имеет мощность континуума. Известно, что

1. Существует такая непрерывная функция $f(x)$, для которой $S(\xi)$ имеет мощность континуума при всех $\xi \in [m, M]$ (Singh A. N., Theory and construction of non-differentiable functions, 89).

2. Если $f(x)$ непрерывна, но нигде не дифференцируема, то $S(\xi)$ имеет мощность континуума для почти всех $\xi \in [m, M]$ (Minakshisundaram S., J. Indian Math. Soc., 1940, **4**, 31—33).

3. Существует дифференцируемая функция, не монотонная ни в каком интервале (Körcke A., Math. Ann., 1889, **34**, 161—171).

В реферируемой работе доказывается следующая теорема:

Если $f(x)$ непрерывна, но не монотонна ни в каком интервале, то те значения $\xi$, для которых $S(\xi)$ имеет мощность континуума, образуют множество второй категории на $[m, M]$.

При этом, в отличие от принятой в советской литературе терминологии, под множеством второй категории понимается всякое множество, не являющееся множеством первой категории.

*В. А. Успенский*

Примечание редакции. При переводе названия статьи написано $[a, b]$, а не $(a, b)$ (как в подлиннике), так как в статье имеется в виду не интервал, а сегмент.

**154. Свойство логарифмически вогнутых функций. I, II. Леккеркеркер** (A property of logarithmic concave functions. I,II. Lekkerkerker C. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 505—513, 514—521; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 505—513, 514—521 (англ.)

Доказывается следующая теорема из мало разработанной теории вогнутых функций:

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции действительного переменного $x$, удовлетворяющие условиям:

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ положительны и строго убывают для $x \geqslant 0$,

2) $f(x)$ и $\varphi(x)$ логарифмически вогнуты в $0 \leqslant x < \infty$. Тогда интеграл $\int_0^\infty f(t)\,\varphi(t+x)\,dt$ существует и представляет функцию $f_1(x)$, которая положительна, строго убывает и логарифмически вогнута в интервале $0 \leqslant x < \infty$.

Более того, если $\ln \varphi(x)$ не является линейной функцией ни в одном интервале $a \leqslant x < \infty$ $(a > 0)$, то функция $f_1(x)$ является строго логарифмически вогнутой функцией.

На основе сформулированной теоремы доказывается следующее предложение:

Пусть $f(x)$ непрерывна, положительна, строго убывает, логарифмически вогнута в $0 \leqslant x < \infty$ и $\ln f(x)$ не является линейной функцией в $0 \leqslant x < \infty$; тогда

$$0 < f_0(0) < f_1(0) < \ldots < f_n(0) < \ldots, \text{ где}$$

$$f_0(x) = f(x),\ f_{n+1}(x) = \frac{2}{\gamma}\int_0^\infty f_n(t)\,f_n(t+x)\,dt$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

$$\text{с } \gamma = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Последнее предложение применяется к изучению вопроса о поведении плотностей распределения вероятностей.

*П. Л. Ульянов*

**155. О предельном переходе под знаком интеграла для последовательности интегралов Стилтьеса—Лебега в абстрактных пространствах с массой, изменяющейся вместе с подинтегральной функцией. Кафьеро** (Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale per successioni d'integrali di Stieltjes—Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi. Cafiero Federico), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 223—245 (итал.)

Пусть $S$ — абстрактное пространство, $\mathscr{T}$ — вполне аддитивное семейство подмножеств $S$. Обозначим через $\mathscr{T}\cdot H$ часть семейства $\mathscr{T}$, состоящую из множеств, содержащихся в $H$. Пусть $\{S_r\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathscr{T}$, сходящаяся к $S$. Функцию $\varphi(I)$, вполне аддитивную на каждом из семейств $\{\mathscr{T}\cdot S_r\}$, назовем массой или весовой функцией. Множества семейств $\{\mathscr{T}\cdot S_r\}$ суть множества с конечной массой. Множества, принадлежащие $\mathscr{T}$, назовем измеримыми. Неотрицательная весовая функция называется мерой. Мера определяется для любого измеримого множества при помощи равенства

$$\mu(I) = \lim_{r\to\infty} \mu(IS_r).$$

Семейство вполне аддитивных функций называется (согласно Каччопполи) равномерно аддитивным, если $\varphi(I_n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $\varphi$ для любой последовательности измеримых множеств $I_n$, имеющей пределом пустое множество.

Главные результаты, доказываемые автором, состоят в следующем:

1) Пусть функция $f_n$ элемента измеримого множества $H$ суммируема относительно весовой функции $\varphi_n$ на множестве $H$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и пусть $f_n$ сходится к $f$ для каждого элемента множества $H$, $\varphi_n$ сходится к $\varphi$ на каждом подмножестве $H$ с конечной массой. Тогда, если последовательность интегралов от функций $f_n$ относительно $\varphi_n$ ограничена на каждом множестве семейства $\mathscr{T}\cdot H$, то функция $f$ суммируема в $H$ относительно $\varphi$.

2) Если интегралы $\left\{\int_I f_n\,d\varphi_n\right\}$, определенные на измеримых подмножествах $I$ измеримого множества $H$, где функции $f_n$ равномерно ограничены для каждого элемента $H$, а весовые функции $\varphi_n$ равномерно ограничены на каждом подмножестве $H$ с конечной массой, равномерно аддитивны на семействе $\mathscr{T}\cdot H$, то они равномерно ограничены на этом семействе.

3) Пусть $f_n$ — функция, суммируемая относительно $\varphi_n$ на измеримом множестве $H$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть $f_n \to f$ в каждой точке $H$, а $\varphi_n \to \varphi$ для каждого подмножества $H$ конечной массы. Тогда, для того чтобы при любом измеримом подмножестве $I$ множества $H$ имело место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,d\varphi_n = \int_I f\,d\varphi,$$

необходимо и достаточно, чтобы интегралы от функций $f_n$ относительно $\varphi_n$ были равномерно аддитивны на семействе измеримых подмножеств $I$ множества $H$.

Кроме того, делаются замечания о возможности обобщения (как в простейшем классическом случае) теоремы о предельном переходе под знаком интеграла на случай, когда сходимость $f_n$ к $f$ имеет место не везде, а лишь почти везде, а также на случай, когда $f_n \to f$ по мере. Для этого при помощи последовательности $\{\varphi_n\}$ строится функция, играющая роль меры.

Результаты автора являются обобщением и итогом ряда классических и более поздних исследований. Дан весьма обстоятельный обзор литературы и имеющихся результатов, относящихся к данному вопросу. В частности, анализируя понятие равномерной аддитивности, автор приводит новые условия равномерной аддитивности. Определения интеграла Стилтьеса — Лебега с областью интегрирования бесконечной меры не дается.

*В. М. Дубровский*

**156. О компактных семействах аддитивных функций абстрактного множества Кафьеро** (Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astratto. Cafiero Federico), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 30—40 (итал.)

Рассматриваются конечные действительные функции множества. Пусть $\mathscr{F}$ — вполне аддитивное семейство множеств некоторого абстрактного пространства и пусть на множествах $I \in \mathscr{F}$ определены вполне аддитивные функции $\varphi(I)$, образующие семейство Ф. Пусть $M(I)$ — неотрицательная вполне аддитивная функция из семейства Ф, причем равенство $M(I) = 0$ влечет равенство $\varphi(I) = 0$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

В работе изучаются свойства (A), (B) и (C) семейства Ф, которые впервые рассматривались соответственно в работах Витали, Каччопполи и референта.

(A) (Равностепенная абсолютная непрерывность). Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $M(I) < \delta$ следует неравенство $|\varphi(I)| < \varepsilon$, каковы бы ни были $\varphi \in \Phi$ и $I \in \mathscr{F}$.

(B) (Равномерная непрерывность). $\varphi(I_n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $\varphi \in \Phi$, какова бы ни была последовательность множеств $I_n$, имеющая пределом пустое множество.

(C) (Равномерная аддитивность). $\varphi(I_{n+1} + I_{n+2} + \ldots) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $\varphi \in \Phi$, какова бы ни была последовательность взаимно не налегающих множеств $I_n$.

В реферируемой работе и в другой своей работе (Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **12**, 155—162) автор следующим образом устанавливает эквивалентность свойств (A), (B) и (C); очевидно, из (A) следует (B) и из (B) следует (C); из (B) следует (A), что вытекает из совокупности результата Каччопполи (Caccioppoli R., Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli, 1929, сер. 4, **35**, 34—40) и результата референта (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 5, 737—740); из (C) следует (B), что доказывается автором непосредственно. (Приведенные результаты автора не являются новыми. Действительно, свойство (C) влечет за собой свойство (A), что вытекает из цитированной выше работы референта и другой его работы (Матем. сб., 1947, **20** (62), № 2, 317—329) при иных формулировках и независимо от результата Каччопполи. Однако эти результаты автора дают более непосредственную связь между свойствами (B) и (C), не основанную на трансфинитной индукции. *Прим. реф.*).

В дальнейшем рассматривается счетная последовательность $\{\varphi_n\}$ вполне аддитивных функций, определенных на семействе $\mathscr{F}$, и формулируются следующие теоремы, доказанные уже в цитированной выше работе автора:

I. Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы каждой последовательности $\{I_n\}$ взаимно не налегающих множеств семейства $\mathscr{F}$ и каждому положительному $\varepsilon$ можно было поставить в соответствие индексы $\rho$ и $\nu$ таким образом, чтобы имело место неравенство $|\varphi_n(I_\rho)| < \varepsilon$ для $n > \nu$.

II. Пусть, какова бы ни была последовательность $\{I_n\}$ взаимно не налегающих множеств семейства $\mathscr{F}$, в ней найдется хотя бы одно множество $I_r$, на котором последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится. Тогда функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно непрерывны.

Кроме того, в реферируемой работе доказываются следующие теоремы:

III. Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно непрерывны, достаточно (и необходимо), чтобы для любой последовательности $\{I_n\}$ взаимно не налегающих множеств семейства $\mathscr{F}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно было бы определить индекс $\rho$ так, чтобы $|\varphi_n(I_r)| < \varepsilon$ при $r > \rho$ и любом $n$.

IV. Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно непрерывны, достаточно (и необходимо), чтобы для любой монотонно убывающей последовательности $\{I_n\}$ множеств семейства $\mathscr{F}$, имеющей пределом пустое множество, и любого $\varepsilon > 0$ можно было бы определить индекс $\rho$ так, чтобы $|\varphi_n(I_r)| < \varepsilon$ при $r > \rho$ и любом $n$.

В теоремах I, III, IV выбор индексов зависит не только от $\varepsilon$, но и от последовательности $\{I_n\}$. При помощи теорем III и IV даются два доказательства теоремы Витали — Лебега:

Если последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится для любого множества семейства $\mathscr{F}$, то функции этой последовательности равномерно непрерывны (частный случай теоремы II).

Примечание референта. Из теоремы IV очевидно, вытекает, что свойство (C) влечет за собой свойство (B). Если ограничиваться рассмотрением лишь равномерно ограниченного семейства Ф, то каждое из свойств (A), (B), (C) будет эквивалентно свойству, состоящему в том, что функции семейства Ф представимы в виде

$$\varphi(I) = \int_I f\,dM,$$

где $M$ — одна и та же неотрицательная вполне аддитивная функция, причем для интеграла обычное условие суммируемости (относительно $M$) выполняется равномерно относительно $f$ (Дубровский В. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, 341—356).

*В. М. Дубровский*

**157. О предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса — Лебега в абстрактных пространствах с массой, изменяющейся вместе с подинтегральной функцией.** **Кафьеро** (Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes — Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi. Cafiero Federico), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 4, 488—494 (итал.)

Дается краткий обзор содержания другой работы автора (см. реф. 155). *В. М. Дубровский*

**158. Асимптотический качественный предел.** **Маркус** (Limita aproximativă calitativă. Marcus S.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 1—2, 9—12 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть $f(x)$ — действительная функция, определенная в топологическом пространстве. Нижнюю грань чисел $y$, для которых множество $E(f(x) > y)$ имеет первую категорию в точке $x_0$, автор называет верхним (асимптотическим) качественным пределом $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначает

$$\lim_{x \to x_0} \text{cal sup } f(x).$$

Аналогично вводится нижний качественный предел. Если оба предела совпадают, их общее значение называется качественным пределом $f(x)$ в точке $x_0$. Перечисляются свойства качественного предела.

*П. И. Романовский*

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

**159. Об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами.** **Ронкин Л. И.**, Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 5, 887—890

Дано следующее обобщение теоремы Б. М. Левитана (Докл. АН СССР, 1937, **15**, № 4, 169—172) об аппроксимации целых функций экспоненциального типа тригонометрическими полиномами:

Пусть положительная функция $\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ стремится к бесконечности при $\sum_{k=1}^{n} |t_k| \to \infty$ и существует $n$ положительных функций $\alpha_k(t)$ таких, что

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k(t_k) \geqslant \alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n), \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha_k(t)}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

$\alpha_k(t_2) \geqslant \alpha_k(t_1)$ при $|t_2| \geqslant |t_1|$ (или $\alpha_k(x)\,\alpha_k(y) \geqslant \alpha_k(x+y)$).

Тогда для каждой целой функции $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ конечной степени $\sigma$,

$$\sigma = \overline{\lim_{\sum_{k=1}^{n} |z_k| \to \infty}} \frac{\ln |F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|}{|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|},$$

удовлетворяющей условию

$$\sup_{\substack{-\infty < x_i < \infty \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| = M < \infty,$$

существует последовательность тригонометрических полиномов вида

$$S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{k_1, k_2, \ldots, k_n} e^{i \sum_{m=1}^{n} \lambda_{k_m}(h) x_m},$$

сходящаяся при $h \to 0$ к $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равномерно в каждой конечной области и удовлетворяющая условиям

$$\max_{k_m} |\lambda_{k_m}(h)| \leqslant \sigma + h,$$

$$\sup_{\substack{-\infty < x_i < \infty \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \leqslant M.$$

*В. А. Марченко*

**160. Относительно наилучших приближений в среднем периодических функций с особенностями.** **Дзядык** (Про найкраще наближення в середньому періодичних функцій з особливостями. Дзядик В. К.), Наукові зап. Луцького пед. ін-ту, сер. фіз.-матем., 1953, № 1, 51—65 (укр.)

Приводятся развернутые доказательства результатов автора, опубликованных в Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 6, 949—952.

Пусть функция $f(t)$ периода $2\pi$ обладает свойствами: 1) при произвольном $n$ наилучший в среднем (в смысле метрики $L$) для функции $f(t)$ тригонометрический полином $T^*_{n-1}(t)$ порядка $n-1$ интерполирует ее с изменением знака разности $f(t) - T^*_{n-1}(t)$ лишь в нулях функции $\cos(nt + r)$, где $r$ — действительное число; 2) $E_n(f)_L - E_{n+1}(f)_L = o(E_n(f)_L)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ имеет место

$$\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} |f(t) - T^*_{n-1}(t)|\, dt = o\left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(t) - T^*_{n-1}(t)|\, dt \right\}.$$

Более точный результат доказывается для функции

$$f(t) = D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

с натуральным $r$, обладающей свойствами 1) и 2), и с его помощью доказывается следующая теорема, аналогичная соответствующей теореме референта (Докл. АН СССР, 1947, 55, № 3, 195—198), относящейся к непериодическому случаю.

Теорема. Пусть функция $f(t)$ периода $2\pi$ имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, которая в свою очередь является неопределенным интегралом от функции $\varphi(t) = f^{(r)}(t)$ ограниченной вариации. Положим $\varphi(t) = g(t) + h(t)$, где $g(t)$ — функция скачков и $h(t)$ — абсолютно непрерывная функция. Тогда

$$E_{n-1}(f)_L \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \quad (n \to \infty),$$

где $A_k = \varphi(a_k + 0) - \varphi(a_k - 0)$, $a_k$ — точки разрыва функции $\varphi(t)$, принадлежащие к $[-\pi, \pi)$, и

$$K_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

*С. М. Никольский*

**161. Обобщение теоремы Зигмунда и его приложение. Чжоу Хун-цзин** (An extension of a theorem of Zygmund and its application. Chow Hung Ching), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 2, № 114, 189—198 (англ.)

Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с единичным кругом сходимости при некотором $p > 0$ принадлежит классу $H^p$, т. е. при $r \to 1-0$

$$M_p(r; f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = O(1),$$

и пусть

$$t_n^{\alpha}(\theta) = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k c_k e^{ki\theta}.$$

Доказывается, что если $\alpha = 1/p$ при $0 < p \leqslant 1$ и $\alpha > 1/p$ при $1 < p \leqslant 2$, то а) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^{\alpha}(\theta)|^2}{n}$$

сходится почти для всех $\theta$, б) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{in\theta}}{[\ln(n+1)]^{1/2+\delta}} \quad (\delta > 0)$$

абсолютно суммируем методом $|C, \alpha|$ почти для всех $\theta$. При $p = 1$ первое из этих утверждений было ранее установлено Зигмундом (Zygmund A., Fundam. math., 1938, **30**, 170—196), а второе автором (J. London Math. Soc., 1941, **16**, 215—220). *А. Ф. Тиман*

**162. Некоторые формулы П. Стейна и других, относящиеся к тригонометрическим суммам. Слейтер** (Some formulae of P. Stein and others concerning trigonometrical sums. Slater N. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 33—39 (англ.)

Рассматриваются тригонометрические суммы вида

$$f(t) = F(\nu t + \psi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi(\nu_k t + \psi_k),$$

где при всех $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $\nu_k > 0$ и $a_k \neq 0$.

Обозначая количество корней уравнения $f(t) = a$ на полуинтервале $0 \leqslant t < T$ через $G_a(T; \psi)$, автор изучает средние

$$E_a(\psi) = \lim_{T\to\infty} \frac{G_a(T; \psi)}{T},$$

$$E_a = \frac{1}{T}\int_0^1 \cdots \int_0^1 G_a(T; \psi)\, d\psi_1(1) \ldots d\psi_n$$

и выводит для них некоторые формулы.

Пользуясь имеющимся в работе Каца (Кас М., Amer. J. Math., 1943, 65, 609) представлением

$$G_a(T; \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \exp\{i\xi[f(t) - a]\} |f'(t)| \, dt \, d\xi,$$

он получает, что

$$E_a = 2\sum_{r=1}^{n} \nu_r \int \cdots \int \prod_{k\neq r} d\psi_k,$$

где интеграл в правой части есть мера множества, определенного неравенством

$$\nu_r^2\left(\sum_{k\neq r} a_k \cos 2\pi\psi_k - a\right)^2 + \left(\sum_{k\neq r} \nu_k a_k \sin 2\pi\psi_k\right)^2 \leqslant \nu_r^2 a_r^2 \quad (0 \leqslant \psi_k < 1).$$

Даны также некоторые другие формулы для средних (1) и в известной части указаны их простые доказательства, основанные на геометрических соображениях.

Приведенные результаты примыкают к более ранним исследованиям автора (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, **35**, 67; Proc. Roy. Soc., 1948, **A194**, 112; Philos. Trans. Roy. Soc., 1953, **A246**, 57) и других математиков (Кас М., Kampen E. R. van, Wintner A., Amer. J Math., 1939, **61**, 985; Stein P., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, **31**, 455).

Как отмечает автор, основные результаты статьи имеются в одной неопубликованной работе Стейна. *А. Ф. Тиман*

**163. Об одной теореме П. Эрдёша и П. Турана. Фрейд** (Über einen Satz von P. Erdös und P. Turán. Freud G.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 3—4, 255—266 (нем.; резюме русс.)

Оцениваются сверху и снизу расстояния двух соседних корней ортогональных многочленов на $[-1, 1]$ с некоторой весовой функцией.

Доказывается следующая основная теорема:

Пусть $\{P_n(x)\}$ — последовательность многочленов на $[-1, 1]$, ортогональных относительно весовой функции $w(x) \in L(w(x) \geqslant 0)$ и имеющих положительные старшие коэффициенты. Пусть у многочлена $Q_n(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)$ $(B < 0)$ все корни $x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n}$ простые и действительные. Тогда

а) если $0 < m \leqslant w(x) \leqslant M$ при $x \in [a, b] \subset [-1, 1]$, то для всех $x_{i,n} \in [a + h, b - h]$, где $h > 0$, справедливо неравенство

$$\frac{c_1}{n} \leqslant x_{k+1,n} - x_{k,n} \leqslant \frac{c_2}{n},$$

где $c_1$ и $c_2$ зависят только от $m$, $M$, $h$, $a$, $b$ и не зависят от $n$ и $k$,

б) если же

$$\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant w(x) \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

то справедливо неравенство

$$\frac{1}{40}\frac{m}{M}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\theta_{k,\,n}-\theta_{k+1,\,n}\leqslant\frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n-3-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n-3}}},$$

где $\theta_{k,\,n}=\arccos x_{k,\,n}$, $\theta_{k,\,n}\in[0,\,\pi]$ и $x_{k,\,n}\in[-1,\,1]$.

Заметим, что случай $A=B=0$ был рассмотрен Эрдёшом и Тураном (Erdös P., Turán P., Ann. Math., 1937, 38, 142—155; 1940, 41, 510—553).

Используя сформулированную теорему, автор получает аналогичные оценки для расстояния корней многочлена $P_n(x)$ при некоторых условиях на весовую функцию $w(x)$. Например, справедлива теорема: Пусть $P_n(x)$ — ортогональный многочлен степени $n$, причем весовая функция $w(x)$ такова, что

$$m\sqrt{1-x^2}\leqslant w(x)\leqslant M\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,\,1].$$

Если $x_{1,\,n}<x_{2,\,n}<\ldots<x_{nn}$ — нули многочлена $P_n(x)$ и $x_{0,\,n}=-1$, $x_{n+1,\,n}=1$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n+2}\leqslant\theta_{k,\,n}-\theta_{k+1,\,n}\leqslant\frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n+1-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n+1}}},$$

где $x_{k,\,n}=\cos\theta_{k,\,n}$ и $k=0,\,1,\ldots,\,n$.

Аналогичные оценки получены и в случаях

$$m\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\leqslant w(x)\leqslant M\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$m\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\leqslant w(x)\leqslant M\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

отличие будет лишь в некоторых постоянных.

*П. Л. Ульянов*

**164. Заметки по анализу Фурье (XLIX). Некоторые отрицательные примеры. Идзуми, Мацуяма, Цутикура** (Notes on Fourier analysis (XLIV): Some negative examples. Izumi S., Matsuyama N., Tsuchikura T.), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, 5, № 1, 43—51 (англ.)

Идзуми (Tôhoku Math. J., 1949—1950, сер. 2, 1, 285—302) доказал теорему, которая дает характеристику поведения интеграла от функции при некотором условии на суммируемость ее ряда Фурье в некоторой точке $x$. Именно, если $\sigma_n^\beta(x)-f(x)=o(n^{\gamma-\beta})$ при $n\to\infty$, где $\beta>\gamma>-1$, то для $\alpha>1+\gamma$

$$\Phi_\alpha(t)=o(t^{\alpha+\beta-\gamma})$$

при $t\to0$, где $f(t)\in L$, $\Phi_\alpha(t)$ — $\alpha$-интеграл от функции $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ и $\sigma_n^\beta(x)$ — чезаровские средние порядка $\beta$ ряда Фурье функции $f(x)$.

В реферируемой статье дано простое доказательство этой теоремы в случае $\beta=0$, $\alpha=1$. Кроме этого, приводятся следующие теоремы, показывающие, что полученные ранее результаты, в некотором смысле, усилить нельзя:

1. Для любой функции $\varepsilon(t)\to0$ при $t\to0$ существует $f(t)\in L$ такая, что ее ряд Фурье сходится в точке $x$, а интеграл

$$\left|\int_0^t\varphi_x(u)\,du\right|\geqslant\varepsilon(t)$$

для бесконечно многих значений $t$, стремящихся к нулю.

2. Пусть функция $\varepsilon(t)$ такова, что $\varepsilon(t)/t^{1+\gamma}\to0$ при $t\to0$ и $0<\gamma<1$. Тогда существует функция $f(t)\in L$ такая, что $s_n(x)-f(x)=o(1/n^\gamma)$, а интеграл $\left|\int_0^t\varphi_x(u)\,du\right|\geqslant\varepsilon(t)$ для бесконечно многих значений $t$, стремящихся к нулю.

3. Пусть $\beta>\gamma>-1$, $\alpha>1+\gamma$ и $\varepsilon(t)/t^{\alpha+\beta-\gamma}\to0$ при $t\to0$. Тогда существует $f(t)\in L$ такая, что $\sigma_n^\beta(x)-f(x)=o(n^{\gamma-\beta})$ при $n\to\infty$, а интеграл $|\Phi_\alpha(t)|\geqslant\varepsilon(t)$ для бесконечно многих значений $t$, стремящихся к нулю.

В статье имеются опечатки.

*П. Л. Ульянов*

**165. О классах бесконечно дифференцируемых функций. Лалагю** (Sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables. Lalaguë Pierre), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 7, 761—762 (франц.)

Сформулированы три внешне не связанные друг с другом теоремы о некоторых классах бесконечно дифференцируемых функций. Первая теорема уточняет результат автора о бесконечно дифференцируемых почти периодических функциях с заданным спектром, именно неравенство $|f^{(n)}(x)|\leqslant6e^2nM_n^E$ (РЖМат, 1953, 1149) может быть заменено на неравенство $|f^{(n)}(x)|\leqslant CM_n^E$, где $C$ — абсолютная константа (отметим, что в указанном реферате имеется опечатка: вместо lim следует читать lim).

Вторая теорема уточняет один результат Мандельбройта (Mandelbrojt S., C. r. Acad sci., 1939, 208, № 16, 1202—1204, предложение 2) об оценке сверху производных $f^{(n)}(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$, если известно, что $|F^{(n)}(\theta)|\leqslant M_n$ $(n=1,\,2,\ldots)$, где $F(\theta)=f(\cos\theta)$. Автор получает оценку в терминах, близких к терминам Мандельбройта, на всем сегменте $[-1,\,1]$ (у Мандельбройта оценка на интервале $(-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$). В третьей теореме рассматривается разложение функции из некоторого класса в сумму двух функций из других классов. Эта теорема здесь не приводится из-за громоздкости формулировки.

*Ю. М. Березанский*

**166 К. Многочлены Бернштейна. Лоренц** (Bernstein polynomials. Lorentz G. G., Math. expositions, № 8, X + 130 pp., Univ. Toronto Press, Toronto, 1953, 5.75 doll.) (англ.)

Рассматриваются многочлены Бернштейна

$$B_n(x)=\sum_{v=0}^{n}f\left(\frac{v}{n}\right)\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v},$$

связанные с данной функцией $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Изучаются точность приближения, а также способы приближения для различных классов $f(x)$. В главе 2 рассмотрены обобщения многочленов Бернштейна и их связь с методами суммирования. Глава 3 имеет дело с функциональными пространствами и проблемой моментов. В главе 4 детально изучена сходимость многочленов Бернштейна для аналитических функций в комплексной области.

Книга заканчивается достаточно исчерпывающей библиографией.

Из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 217.

**167 Д. Об экстремальных свойствах многочленов с целыми коэффициентами и приближение функций этими многочленами. Апарисио Э.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

**См. также:** 41, 42, 121, 128, 140, 171, 346, 419

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**168. О корнях одного класса многочленов. Сингх** (On the zeros of a class of polynomials. Singh S. K.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, 19, № 5, 601—603 (англ.)

Доказываются теоремы:

1) Если

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad (n \geqslant 2) \tag{1}$$

есть многочлен с вещественными или комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условиям

а) $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| \leqslant n|a_n|$,

б) $2^{\frac{n+1}{2}} r^n (n+1)\left|\frac{a_n}{a_0}\right| < 1 \left(r \geqslant \frac{1}{2}\right)$,

то по крайней мере один корень этого многочлена лежит вне круга $|z| \leqslant r$.

2) Если коэффициенты многочлена (1) удовлетворяют условиям

а) $\min\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\} \geqslant 1$,

б) $\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\} \geqslant |a_n|$,

то

$$n\left(\frac{R}{k}\right) \leqslant \frac{2\ln\{(n+1)|a_n|R^n\}}{\ln k} \quad (k>1),$$

где

$$R = \max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^1, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}}\right\},$$

а $n(x)$ обозначает число корней многочлена (1) в круге $|z| \leqslant x$.

3) Если коэффициенты многочлена (1) удовлетворяют условию

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| > \max\left\{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{\frac{1}{2}}, \left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|^{\frac{1}{3}}, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}}\right\},$$

то все корни этого многочлена лежат внутри круга $|z| < 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$.

4) Пусть

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Тогда для любого круга $|z| \leqslant r$ можно найти при $n \geqslant n_0$ такую подпоследовательность последовательности (2), что все корни многочленов, входящих в нее, лежат вне круга $|z| \leqslant r$.

Доказательства теорем 1) и 2) основаны на лемме: если $F(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$ и $\ln|F(0)| > -A$, $\ln|F(z)| < A$ при $|z| \leqslant R$, то $n(r) \leqslant \frac{2A}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$, где $|z| \leqslant r < R$ (Bernstein V., Ann. mat., 1934, 12, 173—196).

Теорема 4) есть следствие теоремы Гурвица (Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950, 317). Она допускает следующее очевидное обобщение: любому $r > 0$ соответствует такое $N_r > 0$, что при $n > N_r$ все корни многочленов $S_n(z)$ лежат вне круга $|z| \leqslant r$.

*В. А. Зморович*

**169. Об одном обобщении теоремы Абеля о степенных рядах. Бертолини** (Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze. Bertolini Fernando), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 4, 483—488 (итал.)

Доказывается теорема: В плоскости комплексного переменного $z$ даны точки $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ такие, что круги $|z-\alpha_i| \leqslant |z_i - \alpha_i|$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ не пересекаются и все содержатся внутри круга $|z-\alpha_0| \leqslant |z_0 - \alpha_0|$; дано, что числовые последовательности

$$a_{ik}(z_i - \alpha_i)^{-k}, \quad a_{0k}(z_0 - \alpha_0)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ограничены, тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{0k}(z-\alpha_0)^k + \sum_{i=0}^{n} a_{ik}(z-\alpha_i)^{-k}\right] \tag{1}$$

сходится абсолютно в каждой замкнутой области, содержащейся в области, определяемой неравенствами

$$|z-\alpha_0| < |z_0 - \alpha_0|, \quad |z-\alpha_i| > |z_i - \alpha_i|.$$

Если же ряд (1) сходится в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$, то он сходится равномерно в пересечении замкнутых множеств, определяемых неравенствами

$$0 \leqslant \frac{|z-z_0|}{|z_0-\alpha_0| - |z-\alpha_0|} \leqslant \omega_0;$$

$$0 \leqslant \frac{|z-z_i|}{|z-\alpha_i| - |z_i-\alpha_i|} \leqslant \omega_i;$$

где $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ — какие угодно положительные числа не меньшие единицы.

Доказывается также аналогичная теорема, получающаяся из вышеуказанной, если заменить в ней круг $|z-\alpha_0| \leqslant |z_0-\alpha_0|$ всей плоскостью и положить $a_{0k}=0$. *М. А. Лукомская*

**170. Дополнение к одной теореме Пойа. Бламбер** (Complément à un théorème de G. Pólya. Blambert Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1622—1624 (франц.)

Рассматривается вопрос о том, когда особая точка $\alpha$ функции $\varphi(s)$ является особой для функции

$$\psi(s)=\sum_1^\infty \gamma_n \varphi^{(n)}(s),$$

где $\gamma_n$ — постоянные. Пойа (Polya G., Ann. Math., 1933, **34**, 617—620) показал, что точка $\alpha$ будет особой для $\psi(s)$ при следующих (достаточных) условиях: 1) функция

$$\theta(z)=\sum_1^\infty (-1)^n \gamma_n z^n$$

является целой, растущей не быстрее целой функции первого порядка минимального типа;

2) имеется круг с центром в $\alpha$ и диаметр $AB$ этого круга такие, что $\varphi(s)$ является аналитической в одном из полукругов, на которые $AB$ делит круг, и на одном из радиусов, составляющих $AB$. Автор дополняет этот результат следующей теоремой (приведенной без доказательства): Пусть

$$\varphi(s)=\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}, \quad \lambda_n \uparrow \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D>0,$$

причем прямая голоморфности функции $\varphi(s)$ не является купюрой для $\varphi(s)$. Пусть затем $\theta(z)$ — целая функция рода 0, все нули которой отрицательны (за исключением самое большее конечного числа). Тогда всякая особая точка $\varphi(s)$, лежащая на прямой голоморфности, будет особой для

$$\psi(s)=\sum_1^\infty a_n \theta(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}.$$

В виде гипотезы формулируется затем такая теорема: пусть $\theta(z)$ — целая функция рода 0, все нули которой положительны, и пусть

$$\varphi(s)=\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$$

неограниченно продолжима налево (по некоторым путям). Если особая точка $\alpha$ функции $\varphi(s)$, лежащая на прямой голоморфности, не является особой для $\psi(s)$, то в окрестности $\alpha$ $\varphi(s)=\varphi_1(s)+\varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ регулярна в некоторой окрестности $\alpha$, а $\varphi_2(s)$ есть сумма ряда Дирихле, показатели которого действительны и имеют плотность 0.
*А. Ф. Леонтьев*

**171. Об одном построении А. Пуанкаре. Валирон** (Sur une construction de H. Poincaré. Valiron Georges), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 239—243 (франц.)

Вносятся существенно необходимые добавления в доказательство следующей теоремы А. Пуанкаре (Poincaré H., Amer. J. Math., 1892, **14**, 201—221):

Пусть $f(x)$ и $f_1(x)$ — две аналитические функции, для которых областями существования являются соответственно верхняя и нижняя полуплоскости.

Тогда существуют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что:

1. $\varphi(x)$ аналитическая в плоскости за исключением отрезка $-1\leqslant x\leqslant 1$, являющегося для нее купюрой; $\psi(x)$ также аналитическая в плоскости за исключением отрезков $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 1$, являющихся для нее купюрами;

2. $\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$ в верхней полуплоскости и $\varphi(x)+\psi(x)=f_1(x)$ в нижней полуплоскости.
*В. С. Федоров*

**172. Принцип площадей в теории однолистных функций. Ся Дао-син** (單葉函數論中的面積原理 ○ 夏道行), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 3, 208—212 (кит.; резюме англ.)

Пусть $F(\xi)=\xi+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\xi}+\ldots$ регулярна в области $G: 1<|\xi|\leqslant\infty$, $Q_m(t)$ — полином степени $m$ и $Q_m(F(\xi))=\sum_{n=-m}^{\infty} C_n\xi^{-n}$. Волибнер (Wolibner W., Colloq. math., 1951, **2**, 248—253) показал, что если неравенство

$$\sum_{n=-m}^{\infty} n|C_n|^2\leqslant 0$$

выполняется для любого $Q_m(t)$, то функция $F(\xi)$ однолистна в $G$. В 1940 г. Голузин установил необходимость этого условия (Матем. сб., 1940, **8**, 227—284). В статье показано, что если функция $F(\xi)$ удовлетворяет условию Волибнера, то площадь образа области $G$ в плоскости $Z$ при

$$z=\sum_{\mu=1}^{n}\gamma_\mu \log\frac{F(\xi)-F(\xi_\mu)}{\xi-\xi_\mu}$$

не больше, чем

$$\pi\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu\log\frac{1}{1-1/\xi_\mu\bar{\xi}_\nu},$$

где $\xi_\mu$, $\gamma_\mu$ — произвольные постоянные, $|\xi_\mu|>1$. Из этой теоремы следует, что при выполнении условия Волибнера

$$\left|\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu\log\frac{F(\xi_\mu)-F(\xi_\nu)}{\xi_\mu-\xi_\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu\log\left(1-\frac{1}{\xi_\mu\bar{\xi}_\nu}\right) \qquad (1)$$

и

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty} d_{mn}\lambda_m\lambda_n\right|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\lambda_m|^2}{m}, \qquad (2)$$

где $\lambda_m$ $(m=1,2,\ldots)$ — произвольные постоянные, $d_{mn}$ — коэффициенты в разложении

$$\log\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=\sum_{m,\,n=1}^{\infty}d_{mn}\frac{1}{\xi_1^m\xi_2^n}.$$

Из (1) вытекает, что $F(\xi)$ однолистна в $G$.

Таким образом, используя только принцип площадей, автор дает еще одно доказательство теоремы Волибнера и неравенств (1) и (2) (которые были получены ранее вариационным методом Голузиным, Шиффером и автором). *В. Н. Телиянц*

**173. Многолистно звездообразные функции. Робертсон** (Multivalently star-like functions. Robertson M. S.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 539—549 (англ.)

Пусть функция $f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ принадлежит классу $S(p)$ регулярных и $p$-листно звездообразных относительно начала координат функций в круге $|z|<1$, т. е. аналитически характеризуется условиями

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0,\quad\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}d\theta=2p\pi$$

для $z=re^{i\theta}$, $\rho<r<1$.

Автор доказывает, что при $n>p$ и дополнительном условии $a_1=a_2=\ldots=a_{p-2}=0$ справедливо точное неравенство

$$|a_n|\leqslant\sum_{k=p-1}^{p}\frac{2k(n+p)!\,|a_k|}{(p+k)!\,(p-k)!\,(n-p-1)!\,(n^2-k^2)}$$

для произвольной пары чисел $|a_{p-1}|$, $|a_p|$, $|a_{p-1}|+|a_p|\neq0$ ($a_0=0$). В частности, для $p=2$

$$|a_n|\leqslant\frac{n|n^2-4|}{3}|a_1|+\frac{n(n^2-1)}{6}|a_2|,$$
$$|a_1|+|a_2|\neq0.$$

Этим автор в рассматриваемом им частном случае оправдывает высказанное Гудманом (Goodman A. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 175—192) в общем классе $p$-листных функций в качестве предположения точное неравенство

$$|a_n|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{2k(n+p)!\,|a_k|}{(p+k)!\,(p-k)!\,(n-p-1)!\,(n^2-k^2)},\quad n>p$$

(оно было доказано Гудманом и Робертсоном (Goodman A. W., Robertson M. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, 127—136) для класса $T(p)$ типичновещественных функций порядка $p$, содержащего в себе $p$-листные функции с действительными коэффициентами). Для всего класса регулярных $p$-листных функций Бернацким ранее (Biernacki M., C. r. Acad. sci., 1936, **203**, 449—451) было установлено неравенство $|a_n|\leqslant A(p)\max\{|a_1|,\ldots,|a_q|\}$, где $q$ — число нулей функции $f(z)=a_1z+\ldots$ в круге $|z|<1$. *И. Е. Базилевич*

**174. Теоремы о симметричных однолистных функциях. Гун Шэн** (對稱單葉函數的二個定理。雙昇), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 3, 251—260 (кит.; резюме англ.)

Пусть $k$-симметричная функция

$$f_k(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk+1}^{(k)}z^{nk+1}$$

регулярна и однолистна в круге $|z|<1$, а $k$-симметричная функция

$$F_k(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nk+1}^{(k)}}{\zeta^{nk+1}}$$

регулярна и однолистна в области $1<|\zeta|<\infty$. В работе получены следующие оценки:

1) $n^{1/2}\,|a_n^{(3)}|<2^{3/4}\cdot3^{-1/6}\cdot7^{1/2}\cdot e^{3/2}=6{,}10\ldots$

2) $n^{1/2}\,|a_n^{(3)}|<7{,}96\,e^{-3/2\,(2/3-|a_4^{(3)}|)^2}+o(1)$

(улучшение результата Такахаси (Takahashi) $n^{1/2}\,|a_n^{(3)}|<7{,}96$). В частности, при $a_4^{(3)}=0$

$$n^{1/2}\,|a_n^{(3)}|<4{,}08+o(1).$$

3) $|a_n^{(2)}|<e^{1/2-(1-|a_3^{(2)}|)^2}\cdot2^{1/4}\cdot3^{1/2}+o(1)$.

(Отметим другой результат автора: $|a_n^{(2)}|<2{,}723$ (Sci. Record, 1951, **4**, № 4, 343—349)).

4) $$\left|\log\frac{F_k^k(\zeta_1)-F_k^k(\zeta_2)}{(F_k(\zeta_1)-F_k(\zeta_2))^k}\cdot\frac{(\zeta_1-\zeta_2)^k}{\zeta_1^k-\zeta_2^k}\right|\leqslant$$
$$\leqslant2k\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=k-2}}^{k-2}\left(\int_{|\zeta_1|}^{\infty}\frac{a^{2i+1}da}{a^{2k}-1}\right)^{1/2}\left(\int_{|\zeta_2|}^{\infty}\frac{a^{2j+1}da}{a^{2k}-1}\right)^{1/2},$$

что эквивалентно

$$\left|\log\frac{F_k^k(\zeta_1)-F_k^k(\zeta_2)}{(F_k(\zeta_1)-F_k(\zeta_2))^k}\cdot\frac{(\zeta_1-\zeta_2)^k}{\zeta_1^k-\zeta_2^k}\right|\leqslant$$
$$\leqslant2k\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=k-2}}^{k-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\zeta_1|^{2+2i-2km}}{2km-2i-2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\zeta_2|^{2+2j-2kn}}{2kn-2j-2}\right)^{1/2}$$

и

$$\left|\log\frac{F_k^k(\zeta_1)-F_k^k(\zeta_2)}{(F_k(\zeta_1)-F_k(\zeta_2))^k}\cdot\frac{(\zeta_1-\zeta_2)^k}{\zeta_1^k-\zeta_2^k}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=k-2}}^{k-2}\left(-\sum_{m=1}^{2k}\omega_m^{2+2i}\log(|\zeta_1|-\omega_m)\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(-\sum_{n=1}^{2k}\omega_n^{2+2j}\log(|\zeta_2|-\omega_n)\right)^{1/2},$$

где $\zeta_1, \zeta_2$ — две любые точки области $1 < |\zeta| < \infty$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2k}$ — корни $x^{2k} - 1 = 0$. При $k = 2$ из 4) получается неравенство Базилевича.

*В. Н. Телянц*

**175. О дифференциальных уравнениях Голузина — Лёвнера.** Гун Шэн (關於戈魯淨—樓五納微分方程. o 龔昇), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 3, 225—230 (кит.; резюме англ.)

Заметка не содержит новых результатов (см., например, Базилевич И. Е., Матем. сб., 1951, **28(70)**, № 2, 283—291). *И. Е. Базилевич*

**176. Принцип возрастания экстремальной длины.** Херш, Пфлюгер (Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. Hersch Joseph, Pfluger Albert), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 20, 1205—1207 (франц.)

Пусть $\{c\}$ — семейство кривых на поверхности Римана и $L_{\{c\}}$ — его экстремальная длина. Указанный в заголовке статьи принцип состоит в том, что, если $\{c'\}$ — семейство образов $\{c\}$ при отображении $z' = f(z)$, где $f(z)$ — аналитическая функция, то $L_{\{c'\}} \geqslant L_{\{c\}}$ (если $f(z)$ унивалентна, то имеет место равенство). Даются некоторые обобщения этой теоремы и ее приложения. Приведем одно из них. Пусть $Q$ — жорданова область, на границе которой отмечены четыре точки $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$. Предположим, что существует функция $f(z) = u + iv$, аналитическая в $Q$ и непрерывная вплоть до границы $Q$, причем $v(\alpha_1) \leqslant -b$, $v(\alpha_2) \geqslant b$, $|u(z)| < a$, $z \in Q$. Тогда модуль $\mu_{\beta_1\beta_2}$ (РЖМат, 1954, 3677) удовлетворяет неравенству $\mu_{\beta_1\beta_2} \leqslant a/b$. *С. Я. Хавинсон*

**177. Изгиб со сдвинутыми центрами: общее исследование с комплексной переменной.** Капильдео (Flexure with shear centres: a general treatment with complex variable. Capildeo R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 308—318 (англ.)

Рассматривается задача об изгибе стержня произвольного сечения. Доказывается, что присоединенное среднее закручивание $\tau_G$ и координаты центра изгиба (центра нагрузки, для которого $\tau_G = 0$) могут быть выражены формулами, содержащими, кроме известных величин, только комплексную функцию кручения $\omega(z)$ ($z = x + iy$) и, в случае многосвязного сечения стержня, постоянные $C_r$, входящие в условия $\omega(z) - \overline{\omega(z)} = iz\bar{z} + iC_r$, которым $\omega(z)$ удовлетворяет на граничных контурах сечения.

В качестве примеров использования этих формул (применяя для определения $\omega(z)$ широко известный метод отображения односвязной области на круг или двусвязной — на кольцо и разыскания решения в виде степенного ряда) автор определяет центр изгиба для сечения, ограниченного двумя эксцентрическими окружностями, а также для двух элементарных случаев односвязного сечения, ограниченного кривой $z = c\sigma(1 + \lambda\sigma)$, $\sigma = e^{i\vartheta}$, и двусвязного сечения, ограниченного кривыми $z = c\sigma(1 + \sigma)$, $\sigma = r_1 e^{i\vartheta}$, $\sigma = r_2 e^{i\vartheta}$, $r_1 > r_2 > 1/2$. *П. П. Куфарев*

**178. О коэффициентах типично-вещественных функций.** Гельфер С. А., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 3, 373—376

Рассматривается класс $Q_r$ типично-вещественных функций, регулярных в круге $|z| < 1$ (Голузин Г. М., Матем. сб., 1950, **27 (69)**, № 2, 201), за исключением $z = 0$, где они имеют простой полюс:

$$F(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

Автор получает точные оценки для $|\alpha_n|$ функций $F(z) \in Q_r$ (для случая $\alpha_{-1} = 0$ вопрос был изучен В. Рогозинским и Г. М. Голузиным).

Доказываются две теоремы:

Теорема 1. Если $F(z) \in Q_r$, причем $F(z) \neq 0$ в круге $|z| < 1$ и $\alpha_{-1} = -1$, то для коэффициентов $F(z)$ имеют место точные оценки:

$$-4 \leqslant 4 \min(\sin n\theta \sin\theta) = B_n \leqslant \alpha_n \leqslant A_n = 4 \max(\sin n\theta \sin\theta) \leqslant 4,$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $n = 2, 3, \ldots$;

$$-1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 3; \quad -2 \leqslant \alpha_0 \leqslant 2,$$

причем

$$A_{2k} = -B_{2k} \approx 4\cos\frac{\pi}{4k} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$A_{4k-1} \approx 4\cos\frac{\pi}{4k-1}, \quad B_{4k-1} = -4 \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$A_{4k+1} = 4, B_{4k+1} \approx -4\cos\frac{\pi}{4k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Автор исходит из теоремы 1 Г. М. Голузина (см. указанную работу) о представлении типично-вещественных функций, регулярных в круге $|z| < 1$, и находит интегральное представление для функций $F(z) \in Q_r$, из которого получает указанные оценки. Приведены примеры функций, для которых достигается равенство в оценке коэффициентов.

Теорема 2. Для коэффициентов функций $F(z) \in Q_r$, нормированных условием $\alpha_1 - \alpha_{-1} = 1$, имеют место точные оценки: $|\alpha_n| \leqslant n$ ($n = 2, 3, \ldots$). Для доказательства автор рассматривает функцию

$$\Phi_r(z) = \frac{r^2 - z^2}{z} F(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} A_n(r) z^n,$$

регулярную в круге $|z| \leqslant r < 1$, за исключением $z = 0$, где она имеет полюс второго порядка. Исходя из интегрального представления коэффициентов $A_n$ и связи между $A_n$ и $\alpha_n$, автор получает указанные оценки.

Приводится пример функции, для которой достигается равенство в оценке коэффициентов.

*Н. С. Очан*

**179. К задаче о вытеснении краевой водой нефти из линзы некруглого очертания.** Булыгин В. Я., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 125—132

Решается задача о восстановлении давлений $\Phi^+$ и $\Phi^-$, которые удовлетворяют уравнениям $\Delta\Phi^+ = 0$, $\Delta\Phi^- = 0$ и условиям сопряжения

$$\Phi_0^+ = \Phi_0^-,$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial\Phi^+}{\partial n}\right)_0 = \frac{k_2}{\mu_2}\left(\frac{\partial\Phi^-}{\partial n}\right)_0, \qquad (1)$$

где $k_1$, $k_2$ — коэффициенты проницаемости, $\mu_1$ и $\mu_2$ — кинематические коэффициенты вязкости воды и нефти, индексом 0 обозначены значения функций давления на границе. Предполагается при этом, что вода занимает всю внешнюю к области нефтеносности $q^+$ часть плоскости $q^-$. В областях $q^+$ и $q^-$ соответственно в точках $0, 1, \ldots, m$ и $m+1, m+2, \ldots, n$ расположены стоки и источники обильности

$$q_0, q_1, \ldots, q_n.$$

Используется конформное отображение на плоскость $w$, где граница раздела представляет окружность $|w| = 1$. Значения функций $\Phi^+$ и $\Phi^-$ на $|w| = 1$ обозначены соответственно $U^+(\varphi_0)$ и $U^-(\psi_0)$. Для определения $U^+(\varphi_0)$ и $U^-(\psi_0)$ следует решить уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[U^-(\psi_0)-U^-(\theta_0)]\,d\theta_0}{\sin^2\frac{\psi_0-\theta_0}{2}}+$$

$$+\frac{S(\varphi_0)}{4\pi k}\int_0^{2\pi}\frac{[U^+(\varphi_0)-U^+(\theta_0)]\,d\theta_0}{\sin^2\frac{\varphi_0-\theta_0}{2}}=$$

$$=\frac{S(\varphi_0)}{k}Q_0(\varphi_0)-Q_{1,0}(\psi_0), \qquad (2)$$

где

$$Q_0(\varphi_0)=\sum_{k=0}^{m}\frac{q_k(1-r_k^2)}{1-2r_k\cos(\varphi_0-\varphi_k)+r_k^2},$$

$$Q_{1,0}(\psi_0)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{q_k(1-r_k^2)}{1-2r_k\cos(\psi_0-\psi_k)+r_k^2},$$

$S(\varphi_0)$ — отношение модулей производных отображающих функций на $|w| = 1$. После того как граничные значения будут найдены, восстанавливаются функции давления. В случае, когда область нефтеносности близка к кругу (граница раздела задается уравнением $r = 1-\delta(\theta)$, $|\delta(\theta)| < \varepsilon$, $|\delta'(\theta)| < \varepsilon$, $|\delta''(\theta)| < \varepsilon$), уравнение (2) приводится к линейному.

*В. Д. Чугунов*

180. **Некоторые элементарные теоремы о целых функциях. Боас** (Some elementary theorems on entire functions. Boas R. P., Jr.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1952, сер. 2, **1**, 323—331 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho$ и пусть $\rho_1$, $n(r)$, $M(r)$, $m(r)$, $\mu(r)$ и $\nu(r)$ — соответственно ее показатель сходимости нулей, количество нулей, модули которых не больше $r$, максимум $|f(z)|$ для $|z| = r$, минимум $|f(z)|$ для $|z| = r$, максимальный член в степенном ряде функции $f(z)$ для $|z| = r$ и индекс максимального члена. Если, кроме того,

$$N(r)=\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt,$$

то справедливы неравенства

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{n(r)}{N(r)}\leqslant\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln n(r)}{\ln r}\leqslant\rho_1\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln n(r)}{\ln r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{n(r)}{N(r)}, \qquad (1)$$

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}\leqslant\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln\nu(r)}{\ln r}\leqslant\rho\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}, \qquad (2)$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\int_1^r t^{-\rho-1}\ln M(t)\,dt}{r^{-\rho}\ln M(r)}=\infty. \qquad (3)$$

Кроме того, если $\rho < 1$, то

$$1-\rho\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{\ln M(r)}\leqslant 1, \qquad (4)$$

и если $\rho = 1$, то при любом $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{r\to\infty} m(r)\,[M(r)]^{1+\varepsilon}=\infty. \qquad (5)$$

Неравенства (1), (2), (4) были установлены Шахом (Shah S. M., J. Indian Math. Soc., 1941, **5**, 189—191; Math. Student, 1942, **10**, 80—82; 1944, **12**, 67—70). Неравенство (4) при $\rho = 0$ ранее установил Валирон (Valiron G., Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, 1923). Соотношение (5) выражает известную теорему Картрайт (Cartwright M. L., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, **30**, 412—420).

Автор дает для (1)—(5) новые значительно более простые доказательства, основанные на элементарных оценках некоторых выражений, содержащих интегралы вида $\int_1^x t^{-k}f(t)\,dt$ и $\int_x^\infty t^{-k}f(t)dt$. *А. Ф. Тиман*

181. **Об одном обобщении понятия дефекта в теории мероморфных функций. Лехто** (On an extension of the concept of deficiency in the theory of meromorphic functions. Lehto Olli), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 207—212 (англ.)

Используя модификацию формулы Фростмана (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, ГИТТЛ, 1941, п. 143), автор доказывает следующую теорему:

Пусть $f(z) \not\equiv \text{const}$ — мероморфная функция в $|z| < R < \infty$ и $G$ — произвольная область с границей положительной емкости. Пусть $g^+(w, a, G)$ равна функции Грина с полюсом в $a$, если $w \in G$, и равна нулю, если $w \notin G$. Если

$$\Phi(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g^+(f(re^{i\varphi}),\,a,\,G)\,d\varphi,$$

то для каждого $a \in G$

$$\Phi(r,a)+N(r,a)=P(r,a), \qquad (1)$$

где $P(r, a)$ является наименьшей гармонической мажорантой $N(r, a)$ в $G$ (ранее автор доказал, что $N(r, a)$ является субгармонической функцией от $a$; см. РЖМат, 1954, 2103).

Равенство (1), являющееся аналогом первой основной теоремы теории распределения значений, так как $\Phi(r, a) = m(r, a) + O(1)$ и $T(r) = P(r, a) + O(1)$, позволяет определить понятие дефекта и для функ-

ций с ограниченной характеристикой. В этом случае $R < \infty$ и почти для всех $\varphi$ существуют граничные значения $w = f(Re^{i\varphi})$. Пусть замыкание Γ множества этих граничных значений имеет непустое дополнение и $G$ — произвольная область вне Γ, содержащая $a$ и некоторые значения $f(z)$ (РЖМат, 1953, 702). Тогда

$$\delta(a) = 1 - \frac{N(R, a)}{P(R, a)}$$

называется дефектом значения $a$ для функции $f(z)$ с ограниченной характеристикой; он не зависит от выбора $G$ и положителен не более чем для множества значений емкости нуль, причем все эти значения являются для $f(z)$ асимптотическими (последние два утверждения приводятся без доказательства). *Л. И. Волковыский*

**182. Об одной задаче в теории распределения значений мероморфных функций. Гольдберг** (Про одну задачу в теорії розподілу значень мероморфних функцій. Гольдберг А. А.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 1, 3—5 (укр.; резюме русс.)

Обратная задача теории распределения значений мероморфных функций заключается в построении мероморфной функции, у которой заданное распределение дефектов и индексов таково, что $\Sigma[\delta(a_k) + \varepsilon(a_k)] = 2$. В работах вьетнамского математика Ле Ван-Тьема (Le Van-Thiem, Comment. math. helv., 1949, **23**, № 1, 26—49; Ann. scient. École norm. supér., 1950, **67**, № 1, 51—98) эта задача решена для случая конечного числа только рациональных $\delta(a_k)$, $\varepsilon(a_k)$ и при условии, что $\delta(a_k) + \varepsilon(a_k) < 1$, если $\varepsilon(a_k) > 0$. В настоящей заметке задача решается для случая $\Sigma\delta(a_k) < 2$ при единственном ограничении, что дефекты положительны над конечным числом точек. Для доказательства используется метод Ле Ван-Тьема, но вместо римановых поверхностей с конечным числом периодических концов используется новый класс римановых поверхностей, имеющих конечное число почти периодических концов. *Л. И. Волковыский*

**183. Об одном критерии нормальности. Montel** (Sur un critère de normalité. Montel Paul), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 11, 536—537 (франц.)

Формулируется ряд критериев для того, чтобы семейство $F$ мероморфных в области $D$ функций $f(z)$ было нормальным или квазинормальным внутри $D$.

Так, например, устанавливается теорема: для нормальности семейства $F$ внутри $D$ необходимо и достаточно, чтобы для всякой области $D'$, содержащейся внутри $D$, корни уравнений

$$f(z) = a,\ f(z) = b,\ f(z) = c,\ f(z) = d,$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — различные числа, были таковы, что расстояние от всякого корня каждого из этих уравнений до всякого корня любого другого из оставшихся уравнений оставалось для всех функций семейства $F$ больше некоторого положительного числа (если одно из взятых чисел оказалось исключительным значением для функций $f(z)$, то это значение не принимается во внимание при определении минимума).

Приведен также следующий общий критерий нормальности, использующий изображение на сфере Римана значений $z$ и $f(z)$, частными случаями которого являются другие критерии, содержащиеся в заметке. Для того чтобы семейство $F$ было нормальным в $D$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции семейства $F$ сферическое расстояние двух чисел $z_1$ и $z_2$ оставалось больше некоторого положительного числа, если сферическое расстояние соответствующих значений функции $f(z_1)$ и $f(z_2)$ больше заранее заданного положительного числа. *Г. Ц. Тумаркин*

**184. Аппроксимирование аналитических функций на незамкнутых римановых поверхностях. Фляте** (Approximation analytischer Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen. Flathe Herbert), Math. Ann., 1953, **125**, № 3, 287—306 (нем.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — незамкнутая риманова поверхность и $\mathfrak{B}$ — область, целиком принадлежащая $\mathfrak{R}$, т. е. компактная на $\mathfrak{R}$. Область $\mathfrak{B}$ называется односвязной относительно $\mathfrak{R}$, если всякая конечная система кривых в $\mathfrak{B}$, ограничивающая (область) в $\mathfrak{R}$, ограничивает область и в $\mathfrak{B}$. Известна следующая теорема (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1948, **120**, 430—461): для того чтобы всякая функция $f(z)$, однозначная и регулярная в $\mathfrak{B}$, допускала равномерное аппроксимирование внутри $\mathfrak{B}$ функциями, однозначными и регулярными на $\mathfrak{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ была односвязна относительно $\mathfrak{R}$. Известно также (Stein K., Acta math., 1950, **83**, 165—196), что на $\mathfrak{R}$ существует примфункция (Primfunktion) $\Omega(\zeta, z)$ — конечная аналитическая функция, однозначная по $\mathfrak{p}(z)$ и мультипликативно многозначная по $\mathfrak{p}(\zeta)$ ($\mathfrak{p}(z)$, $\mathfrak{p}(\zeta)$ — точки $\mathfrak{R}$, $\zeta$, $z$ — локальные параметры) и обращающаяся в нуль первого порядка на поверхности $F: \mathfrak{p}(\zeta) = \mathfrak{p}(z)$, лежащей в области $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ определения $\Omega(\zeta, z)$. Элементарная функция первого порядка $A(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial\zeta} \ln \Omega(\zeta, z)$ играет роль ядра $\frac{1}{\zeta - z}$ в интегральной формуле Коши: для функции $f(z)$, регулярной в области $\mathfrak{B}$ и непрерывной на границе $\mathfrak{B}$, имеет место представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{гр. } \mathfrak{B}} f(\zeta) A(\zeta, z)\, d\zeta. \qquad (1)$$

В настоящей работе для специальных областей $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{R}$ дан метод получения конкретных аппроксимирующих функций, требующий знания какой-либо функции $\Omega(\zeta, z)$. Сначала доказывается следующая теорема: пусть $\mathfrak{p}_1(z_1)$, $\mathfrak{p}_2(z_2)$, ..., $\mathfrak{p}_k(z_k)$ — фиксированные точки $\mathfrak{R}$ и $P(z) = \Omega_1(z_1, z)\,\Omega_2(z_2, z) \ldots \Omega_k(z_k, z)$ — однозначная регулярная на $\mathfrak{R}$ функция с нулями первого порядка в указанных точках и только в них. Тогда для некоторого $\mu_0 > 0$ в области $\mathfrak{R}_\mu$: $|P(z)| < \mu < \mu_0$ всякая однозначная регулярная и непрерывная на границе функция $f(z)$ допускает внутри $\mathfrak{R}_\mu$ разложение

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\nu)} P^n(z) \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\nu)}(z)\, P^n(z) \right), \qquad (2)$$

где постоянные коэффициенты $c_n^{(\nu)}$ однозначно определяются из поведения $f(z)$ в нулях $P(z)$, в то время как функции-коэффициенты $b_n^{(\nu)}(z)$ не зависят от $f(z)$ и определяются из поведения в этих же точках $P(z)$ и произвольно выбираемой элементарной функции $a(\zeta, z)$, принадлежащей $\mathfrak{R}$. Разложение (2) понимается как последовательность его частных сумм, получаемых по правилу перемножения рядов, и эти частные суммы сходятся равномерно к $f(z)$ во всякой замкнутой подобласти $\mathfrak{B}_\mu$.

В дальнейшем $P(z)$ и $a(\zeta, z)$ выражаются через произвольную функцию $\Omega(\zeta, z)$:

$$P(z) = g(z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \Omega(z_\nu, z), \quad a(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \Omega(\zeta, z),$$

где $g(z)$ — однозначная регулярная и $\neq 0$ на $\mathfrak{R}$ функция, а разложение (2) переносится на произвольные области $\mathfrak{B}$, односвязные относительно $\mathfrak{R}$, допускающие нормальное исчерпание «круговыми областями» (так называются области на $\mathfrak{R}$, конформно эквивалентные многолистным круговым областям; исчерпание $\{\mathfrak{B}_\nu\}$ области $\mathfrak{B}$ называется нормальным, если всякая область $\mathfrak{B}_\nu$ односвязна относительно всех областей $\mathfrak{B}_\mu$, $\mu > \nu$ и $\mathfrak{B}$). *Л. И. Волковыский*

185. **Фаберовские разложения и теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера на римановых поверхностях конечного рода.** Рёрль (Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstrasz und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechts. Röhrl Helmut), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 298—307 (нем.)

Вводятся следующие определения: дивизором (в обобщенном смысле) замкнутой римановой поверхности $\mathfrak{R}$ называется формальное произведение

$$\mathfrak{D} = \Big(\prod_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{a_\alpha} \times \mathfrak{p}_\alpha^{-p_{\alpha\lambda}}\Big) \times \Big(\prod_{\beta} \prod_{\mu=1}^{b_\beta} \times \mathfrak{q}_\beta^{q_{\beta\mu}-1}\Big) = \mathfrak{N}^{-1} \times \mathfrak{Z},$$

где $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ — точки $\mathfrak{R}$, $\alpha, \beta$ пробегают конечное число значений, $p_{\alpha\lambda}$, $q_{\beta\mu}$ — натуральные числа, причем $p_{\alpha\lambda'} \neq p_{\alpha\lambda''}$ для $\lambda' \neq \lambda''$ и $q_{\beta\mu'} \neq q_{\beta\mu''}$ для $\mu' \neq \mu''$; затем

$$\mathfrak{D}^{-1} = \Big(\prod_{\beta} \prod_{\mu=1}^{b_\beta} \times \mathfrak{q}_\beta^{-q_{\beta\mu}}\Big) \times \Big(\prod_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{a_\alpha} \times \mathfrak{p}_\alpha^{p_{\alpha\lambda}-1}\Big);$$

порядок $\omega(\mathfrak{D}) = \Sigma_\beta b_\beta - \Sigma_\alpha a_\alpha$; $\mathfrak{D}_2$ является делителем $\mathfrak{D}_1$, если множители в $\mathfrak{N}_2$ (соответственно в $\mathfrak{Z}_1$) в точности содержатся в $\mathfrak{N}_1$ (соответственно в $\mathfrak{Z}_2$); функция (соответственно дифференциал) на $\mathfrak{R}$ называется кратной (кратным) дивизору, если в разложении ее (его) по степеням локальной униформизирующей $t_\alpha$ точки $\mathfrak{p}_\alpha$ отрицательными степенями могут быть лишь $t_\alpha^{-p_{\alpha 1}}, \ldots, t_\alpha^{-p_{\alpha, a_\alpha}}$ (соответственно $t_\alpha^{-p_{\alpha 1}} dt_\alpha, \ldots, t_\alpha^{-p_{\alpha, a_\alpha}} dt_\alpha$), и называется делимой (делимым) дивизором, если в разложении ее (его) по степеням локальной униформизирующей $t_\beta$ точки $\mathfrak{q}_\beta$ отсутствуют степени $t_\beta^{q_{\beta 1}-1}, \ldots, t_\beta^{q_{\beta, b_\beta}-1}$ (соответственно $t_\beta^{q_{\beta 1}-1} dt_\beta, \ldots, t_\beta^{q_{\beta, b_\beta}-1} dt_\beta$). Введенные понятия приводят к обобщению теоремы Римана — Роха, расширению понятий элементарной функции и элементарного дифференциала и соответствующему обобщению теорем о разложении в теории классов функций и фаберовским разложениям для замкнутых римановых поверхностей, полученным ранее Тицом и автором (Tietz H., J. reine und angew. Math., 1952, 190, № 1, 22—33; Röhrl H., Arch. Math., 1952, 3, № 2, 93—102).

Полученные разложения и подходящее исчерпание поверхности $\mathfrak{R}^*$, получаемой из $\mathfrak{R}$ удалением некоторого множества ее точек, позволили автору представить в конкретном виде теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса для $\mathfrak{R}^*$, а следовательно, и для произвольных римановых поверхностей конечного рода, ибо каждая из последних конформно эквивалентна определенной поверхности $\mathfrak{R}^*$ (РЖМат, 1954, 1630; Florack H., Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 1948, 1). *Л. И. Волковыский*

186. **Функции гиперкомплексной переменной в $n$-мерном пространстве.** Рошкулец (Funcţii de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu $n$ dimensiuni. Roşculeţ Marcel N.), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 135—145 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматриваются гиперкомплексные функции

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k U_k$$

гиперкомплексной переменной $\omega = \Sigma_{k=0}^{n-1} \theta^k x_k$. Все $U_k$ — действительные функции действительных переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Числа $\omega$ образуют коммутативное кольцо $H(\omega)$ с гиперкомплексной единицей $\theta$, подчиненной условию

$$\lambda_0 \theta^n + \lambda_1 \theta^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}\theta + \lambda_n = 0$$

с действительными постоянными $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Исходя из общего определения моногенности гиперкомплексной функции по гиперкомплексной переменной, данного референтом (Матем. сб., 1946, 18 (60), 353—378), автор дает условия моногенности $f(\omega)$ по $\omega$ в какой-нибудь области $E_n$ евклидова пространства $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ в виде систем

$$-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial U_0}{\partial x_{k+1}}, \qquad \frac{\partial U_h}{\partial x_k} - \frac{\lambda_{n-h-1}}{\lambda_0}\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial U_{h-1}}{\partial x_{k+1}}, \quad h = 0, 1, \ldots, n-2; \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Доказывается, что характеристические многообразия этих систем являются линейными многообразиями в пространстве $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, параллельными линейным многообразиям делителей нуля кольца $H(\omega)$. Беря на последних многообразиях замкнутые простые спрямляемые кривые, автор изучает свойства интегралов

$$\oint \frac{f(\omega)\, d\omega}{\omega - \tau},$$

взятых по этим кривым ($\tau$ — фиксированное число кольца $H(\omega)$), и получает некоторые аналоги известной формулы интеграла Коши в теории функций комплексного переменного, а также получает для некоторых замкнутых кривых формулу

$$\oint \frac{dU_0}{dn_h}\,ds = 0,$$

определяя производную $\frac{dU_0}{dn_h}$ по некоторому направлению $n_h$ в построенном автором метрическом пространстве чисел кольца $H(\omega)$.

В статье много опечаток. Так, на стр. 137 в формуле (3.5) вместо $\theta^k$ стоит $\theta$, а в уравнении (3.6) двойная сумма должна быть показателем степени числа $e$. На стр. 142 в формуле (4.5) следует поставить $U_0$ вместо $U$.

Цитируя статью референта, автор ошибочно указывает стр. 129, вместо стр. 355—356. *В. С. Федоров*

**187. О сопряженных функциях. II. Смирнов В. И.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 11, 3—12

В ч. II работы (ч. 1 см. РЖМат, 1954, 3687) устанавливается связь теории изотропных конгруенций линий в трехмерном пространстве (евклидовом или римановом с положительной метрикой), построенной на понятии сопряженных функций, с вопросом о существовании функционально-инвариантных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с тремя независимыми переменными, причем автор получает общий вид таких уравнений с главной частью $\Delta v$, имеющих функционально-инвариантные решения (здесь $v$ — искомая функция, $\Delta$ — оператор Лапласа в евклидовом или римановом пространствах). Основное предложение, доказанное для евклидова пространства:

Всякое уравнение вида

$$\Delta\varphi + \boldsymbol{b}\cdot\operatorname{grad}\varphi = 0,$$

где $\varphi(x, y, z)$ — искомая функция, а $\boldsymbol{b}$ — известная вещественная векторная функция от $x$, $y$, $z$, имеет функционально-инвариантное комплексное решение $\varphi = u + iv$ в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{N} + k\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{N}$ — вектор кривизны конгруенции линий пересечения поверхностей $u = C_1$, $v = C_2$ ($C_1$, $C_2$ — постоянные), $\boldsymbol{a}$ — соответствующий этой конгруенции единичный вектор касательной; $k$ — любая функция точки $(x, y, z)$. При этом функции $u$ и $v$ должны быть сопряженными.

Далее рассматриваются сопряженные функции и изотропные конгруенции линий $(L)$ в любом римановом трехмерном пространстве $(x^1, x^2, x^3)$ с положительной метрикой

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

При этом условия сопряженности функций $u(x^1, x^2, x^3)$ и $v(x^1, x^2, x^3)$ имеют вид

$$g^{ik}u_{x^i}\cdot u_{x^k} = g^{ik}v_{x^i}\cdot v_{x^k}; \quad g^{ik}u_{x^i}\cdot v_{x^k} = 0.$$

Изотропная конгруенция линий $(L)$ для функций $u$, $v$ определяется равенствами вида $u = C_1$, $v = C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — постоянные. Автор вводит контравариантный тензор второго ранга

$$T^{ip} = g^{ip}\frac{D\xi^k}{Dx^k} - g^{ik}\frac{D\xi^p}{Dx^k} - g^{pk}\frac{D\xi^i}{Dx^k},$$

где $D$ обозначает тензорное дифференцирование и $\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$ — контравариантный единичный вектор касательной к линии конгруенции $(L)$, и устанавливает, что вдоль каждой линии конгруенции $(L)$ имеют место равенства

$$T^{ip}u_{x^p} = \xi^i\Delta v; \quad \xi^p v_{x^p} = 0,$$

где $\Delta v = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,g^{ik}v_{x^k})$; $g$ — определитель $|g_{ik}|$, а также равенства

$$\begin{vmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & \xi^1 \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & \xi^2 \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & \xi^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\Delta v + \left(\frac{D\xi^p}{Ds} + g^{pk}g_{in}\xi^n\frac{D\xi^i}{Dx^k}\right)v_{x^p} = 0, \qquad \text{(b)}$$

где $s$ — длина дуги вдоль линий конгруенции $(L)$. Основное предложение (данное автором без доказательства):

Пусть некоторая конгруенция линий $(L)$ обладает свойством (a). Тогда 1) уравнение (b) имеет решение $v(x^j)$, отличное от постоянной и сохраняющее постоянное значение вдоль линий $(L)$, а также комплексное функционально-инвариантное решение $u(x^s) + iv(x^s)$, если положить

$$u_{x^j} = \sqrt{g}\,\delta_{\alpha\beta j}\,g^{\alpha\gamma}v_{x^\gamma}\xi^\beta,$$

где $\delta_{\alpha\beta j}$ — тензор, $\delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} = 1$; $\delta_{132} = \delta_{213} = -1$; $\delta_{\alpha\beta j} = 0$ — в остальных случаях; 2) эти решения $u(x^s)$ и $v(x^s)$ уравнения (b) — сопряженные функции и конгруенция $(L)$ изотропная для этих функций; 3) решение $u(x^s) + iv(x^s)$ будет функционально-инвариантным решением и для уравнения, которое получится, если в левой части уравнения (b) добавить к коэффициенту при $v_{x^p}$ слагаемое вида $k(x^s)\,\xi^p$, где $k(x^s)$ — любая функция точки

*В. С. Федоров*

**188. Существование псевдосопряженных на римановых поверхностях. Морс, Дженкинс** (The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces. Morse M., Jenkins J.), Fundam. math., 1952, 39, 269—287 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Действительная функция $u(z)$ называется псевдогармонической или $PH$-функцией в области $D$ комплексной плоскости $z$, если в малом, с точностью до топологического преобразования, она является гармонической функцией $\neq$ const. Две $PH$-функции $u$ и $v$ называются псевдосопряженными или $PC$-функциями, если функция $u + iv$ в малом, с точностью до топологического преобразования $z$, является аналитической функцией $\neq$ const. Доказывается, что для всякой $PH$-функции $u$ в плоскости $|z| < \infty$ существует $PC$-функция $v$. В основу доказательства положено дальнейшее изучение топологи-

ческих свойств линий уровня $PH$-функций и их $PC$-функций (Jenkins J., Morse M., Topological methods on Riemann surfaces. Pseudoharmonic functions, Ann. Math. Studies., Princeton, 1952). Линии уровня функции $u$ рассматриваются как элементы пространства $F$ с метрикой Фреше. Семейство этих линий $\Omega$ приводит к естественному разбиению плоскости $z$ на «лентовидные» области $R(N_i)$, внутри которых семейство $\Omega$ не имеет критических точек. В каждой области $R(N_i)$ функция $v$ определяется непосредственно как $\mu$-длина линий уровня функции $u$ (Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 122); оказывается возможным непрерывное продолжение $v$ на границу областей $R(N_i)$, если предварительно ввести параметризацию граничных дуг $R(N_i)$ и рассматривать их как предельные для дуг, внутренних по отношению к $R(N_i)$ в пространстве $F$. Путем надлежащего «склеивания» вдоль граничных дуг получается функция $v$, являющаяся $PH$-функцией во всей плоскости и $PC$-функцией к $u$.

Как следствие получается следующая теорема об униформизации: для $PH$-функции $u(z)$ в односвязной области $D_z$ существуют гомеоморфное отображение $w(z)$ области $D_z$ на область $D_w$ и гармоническая в $D_w$ функция $u_1(w)$ такие, что $u(z) = u_1[w(z)]$.

Авторы указывают, что методы и результаты их статьи позволяют распространить теоремы существования $PH$-функций и $PC$-функций на произвольные открытые римановы поверхности.

Библиография, 11 названий. *Л. И. Волковыский*

**189. О некоторых аналогиях в строении последовательностей аналитических функций и непрерывных отображений компактов.** Полак А. И., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 627—630

Даются некоторое условия, при которых предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных комплексных функций комплексного переменного принимает свои значения столько же раз, сколько и функции последовательности с достаточно большими номерами. Результат получается как частный случай более общего результата отображений компактов в метрических пространствах.

*Б. В. Шабат*

**190 К. Комплексный анализ. Введение в теорию аналитических функций одного комплексного переменного.** Альфорс (Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable Ahlfors Lars V., 247 pp., McGraw-Hill Co., Inc., N. Y., 1953) (англ.)

Книга состоит из шести глав. Первая глава посвящена комплексным числам и линейным преобразованиям. Отметим, что аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется как любое решение уравнения $e(\theta) = z/|z|$, где $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, $\sin\theta$ определяется из обращения $\int_0^y dt/\sqrt{1-t^2} = \theta$. $\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$; ангармоническое отношение $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ определяется как образ точки $z_1$ при линейном преобразовании, переводящем $z_2$, $z_3$, $z_4$ соответственно в 0, 1, $\infty$.

Вторая глава начинается с рассмотрения непрерывности и аналитичности функций комплексного переменного, после чего изучаются рациональные функции (уже здесь вводятся полюсы и главные части разложения), экспоненциальная и тригонометрические функции; затем даются начальные сведения по топологии (рассматриваются множества точек на плоскости и непрерывные отображения), вводятся функции, аналитические в области, и изучаются элементарные конформные отображения и римановы поверхности (кратко).

В третьей главе сначала рассматриваются криволинейные интегралы и интегральная теорема Коши для прямоугольного контура и произвольного контура в круге; затем вводится индекс точки относительно замкнутого контура

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

и для функций, аналитических в круге, доказывается интегральная формула Коши в следующем виде:

$$n(\gamma, a)\, f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,.$$

Далее теоремы Коши применяются для изучения локальных свойств аналитических функций (устранимые особенности, ряд Тейлора, отображение в малом, принцип сохранения области, принцип максимума и лемма Шварца). Затем теоремы Коши рассматриваются во всей их общности. Основой служит рассмотрение гомологических нулю циклов, состоящих из конечного числа замкнутых контуров. К этому присоединяется широкое использование индекса точки относительно замкнутого контура. В конце главы рассматривается вычисление определенных интегралов.

В четвертой главе изучаются равномерно сходящиеся последовательности аналитических функций, степенные ряды и ряд Лорана; рассматриваются теоремы Миттаг—Леффлера и Вейерштрасса о разложении мероморфных соответственно целых функций, Г-функция и формула Стирлинга, нормальные семейства аналитических функций и теорема Римана о конформном отображении односвязных областей.

Пятая глава посвящена проблеме Дирихле. Сначала рассматриваются основные свойства гармонических функций, решение задачи Дирихле для круга, принцип Харнака, принцип симметрии, а также формула Иенсена. Особо следует отметить введение и использование дифференциала $^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$, сопряженного с дифференциалом $du$ гармонической функции $u$, аналитической функции $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ с $fdz = du + i^*du$ и рассмотрение соотношений $\int_\gamma {}^*du = 0$ и $\int_\gamma u_1^*\, du_2 - u_2^*\, du_1 = 0$ для $\gamma \sim 0$ в рассматриваемой области. Затем рассматриваются субгармонические функции, метод Перрона для решения задачи Дирихле и отображение конечно-связных областей на канонические области.

Последняя глава, шестая, посвящена многозначным аналитическим функциям. В начале этой главы рассматриваются аналитическое продолжение, полные аналитические функции в смысле Вейерштрасса

и их римановы поверхности (как многолистные области), гомотопия путей (изложение весьма сжатое), теорема о монодромии (дается весьма простое доказательство) и алгебраические точки ветвления (на базе фундаментальной группы замкнутых путей в кольце). Затем идет введение в теорию алгебраических функций и аналитическую теорию дифференциальных уравнений.

В целом книга представляет учебное пособие по теории аналитических функций, в котором коротко и строго излагаются основные начала этой теории, знакомство с которыми позволяет перейти к изучению приложений и специальных вопросов. Изложение во многом оригинально и отлично от традиционного. Имеются примеры для самостоятельного решения. *Л. И. Волковыский*

191 К. **Введение в теорию эллиптических функций и их приложения.** **Баумен** (Introduction to elliptic functions with applications. Bowman F., 115 pp., English Universities Press, London, 1953, 12s. 6d.) (англ.)

Краткое изложение теории эллиптических функций Якоби и их приложений, предназначенное для физиков и инженеров. Книга разделена на главы: I. Якобиевы эллиптические функции; II. Эллиптические интегралы; III. Приложения. В главах I—III рассматриваются лишь функции действительного переменного. IV. Комплексный аргумент; V—VI. Конформные отображения; VII. Приложения (к теории электричества, гидродинамике и др.); VIII. Конформные отображения (реализуемые эллиптическими интегралами 2-го и 3-го рода); IX. Приведение эллиптических интегралов к стандартной форме; X. Вырожденный гиперэллиптический интеграл.

Книга содержит большое количество задач, краткую библиографию, таблицы формул и предметный указатель. *П. И. Кузнецов*

192 РЕЖ. **Однозначные аналитические функции.** **Неванлинна** (Eindeutige analytische Funktionen. Nevanlinna Rolf, 2. Aufl. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 46., 379 S., ill, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953, 49,50 DM) [**Рецензия: Вегнер** (Wegner U.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, 96, № 10, 313 (нем.)]

193 Д. **О некоторых свойствах псевдоконформных отображений.** **Лебедев А. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

---

См. также: 7, 40, 83, 146, 150, 161, 165, 197, 200, 236, 245, 288, 306

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

194. **О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде.** **Кошляков В. Н.**, Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 2, 137—148

В уравнениях Эйлера

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=M_x,$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=M_y,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=M_z$$

полагается $M_x=-\lambda Ap$, $M_y=-\lambda Bq$, $M_z=-\lambda Cr$ (моменты сил сопротивления среды), а также принимается, что $\varepsilon=(B-A)/C$ — малый параметр.

Разлагая $p$, $q$ и $r$ по степеням $\varepsilon$, приходим к системам дифференциальных уравнений для нулевого, первого и т. д. приближений, которые легко интегрируются. Особо исследуется случай $C=2A$. Далее, при другом законе сопротивления: $M_x=-\lambda_1 p$, $M_y=-\lambda_2 q$, $M_z=-\lambda_3 r$, рассматривается симметричный гироскоп ($A=B$) и показывается, что $p$ выражается через бесселевы функции порядка

$$\nu=-\frac{1}{2}+\frac{C}{2A}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3},$$

именно: если положить $C(C-A)/(\lambda_3 A)=N$, то

$$p=\left\{C_1 J_\nu\left(Nr_0\exp\left(-\frac{\lambda_3}{C}t\right)\right)+\right.$$
$$\left.+C_2 J_{-\nu}\left(Nr_0\exp\left(-\frac{\lambda_3}{C}t\right)\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{A}+\frac{\lambda_3}{C}\right)t\right).$$

При $M_x=-\lambda_1 p$, $M_y=-\lambda_2 q$, $M_z=-\lambda_3 r^2$ и $A=B$ уравнения Эйлера также интегрируются в элементарных функциях, если $\lambda_1=\lambda_2$. В этом случае

$$p=\exp\left(-\frac{\lambda_1}{A}t\right)\left\{p_0\cos\left[N\ln\left(1+\frac{\lambda_3}{C}r_0 t\right)\right]-\right.$$
$$\left.-q_0\sin\left[N\ln\left(1+\frac{\lambda_3}{C}r_0 t\right)\right]\right\}.$$

При $\lambda_1\neq\lambda_2$ $p$ выражается через функцию Уиттекера. Полученные решения исследуются с физической точки зрения В заключение рассматривается задача о девиации гировертикали. *В. И. Левин*

195. **Дифференциальная система бесконечного порядка с ненулевыми решениями.** **Самнер** (A differential system of infinite order with nonvanishing solutions. Sumner D. B.), Proc. London Math. Soc., 1953, 3, № 12, 464—479 (англ.)

Пусть $\lambda_n=\rho+n-\Delta+2\Delta\alpha_n$, $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1$, $0<\Delta<\frac{1}{4}$. Положим $E(w)=\prod_1^\infty(1-w^2\lambda_n^{-2})$. В работе изучается дифференциальная система

$$DE(D)f(x)=0,\ f(\pm\infty)=0,\ f(z)\in A. \quad (1)$$

Здесь через $A$ обозначен класс функций $f(z)$ таких, что разложение Тейлора

$$\sum_0^\infty \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

сходится равномерно в полосе $|y| \leqslant \theta < \pi$. Пусть

$$h_1(x) = -\sum_1^\infty \frac{\exp(-x\lambda_n)}{E'(\lambda_n)}, \quad h_2(x) = \sum_1^\infty \frac{\exp(x\lambda_n)}{E'(-\lambda_n)},$$

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x > 0 \\ h_2(x), & x < 0. \end{cases}$$

Доказывается, что $h(x)$ можно аналитически продолжить в полосу $|y| < \pi$ и что $h(z) \in A$. В работе доказана следующая теорема: функция $h(x)$ и все ее четные производные удовлетворяют дифференциальной системе (1). Указываются также другие решения системы (1). Случай $\lambda_n = n$ ранее рассматривался Бохнером и Уиддером (Bochner S., Widder D. V., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 409—415). *Б. М. Левитан*

196. **Об особенностях в комплексной плоскости решений уравнения $y'' + y'f(y) + g(y) = P(x)$.** Смит (On the singularities in the complex plane of the solutions of $y'' + y'f(y) + g(y) = P(x)$. Smith R. A.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 12, 498—512 (англ.)

Рассматривается вопрос о возможных типах особенностей решения нелинейного дифференциального уравнения

$$y'' + y'f(y) + g(y) = P(x),$$

где $f$ и $g$ — полиномы относительно искомой неизвестной функции $y$ степени $n$ и $m$ соответственно, $P(x)$ — регулярная функция комплексной переменной $x$ в некоторой области, содержащей точку $x^*$.

Основные результаты, полученные в работе, сформулированы в виде трех теорем:

1) Если $n > m$, то существует бесконечное семейство решений рассматриваемого уравнения, для которых точка $x^*$ есть алгебраическая критическая точка. В окрестности точки $x^*$ эти решения могут быть выражены в виде

$$y(x) = \sum_{\nu=-1}^\infty a_\nu (x - x^*)^{\nu/n},$$

где $a_{-1} \neq 0$.

2) Пусть $n > m$ и $\gamma$ — контур конечной длины, лежащий в $x$-плоскости и имеющий $x^*$ своей конечной точкой. Если $y(x)$ — решение рассматриваемого уравнения, которое может быть аналитически продолжено вдоль $\gamma$ до точки $x^*$, но не через нее, тогда точка $x^*$ является алгебраической критической точкой, о которой говорилось в теореме 1).

3) Пусть $n > m$ и $\gamma$ — непрерывная кривая, лежащая в $x$-плоскости и имеющая $x^*$ своей конечной точкой. Предположим, что решение $y(x)$ рассматриваемого уравнения может быть продолжено аналитически вдоль $\gamma$ до точки $x^*$, но не через нее. Если точка $x^*$ не является алгебраической критической точкой функции $y(x)$ типа, описанного в теореме 1), то она будет точкой накопления подобных алгебраических критических точек.

Доказательства теорем и вспомогательных лемм опираются на теорему существования решений (в виде сходящихся в некоторой области кратных рядов) системы

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = \Psi(x, y, z),$$

где $\Phi(x, y, z)$ и $\Psi(x, y, z)$ — аналитические функции переменных $x, y, z$ в некоторой области.

Как пример автор рассматривает уравнение

$$y'' + 4y^3y' + y = 0$$

и показывает, что оно имеет особенность неизолированного типа. *К. Я. Латышева*

197. **Однозначные решения дифференциальных уравнений $w'' = P(z, w)$.** Виттих (Eindeutige Lösungen der Differentialgleichungen $w'' = P(z, w)$. Wittich Hans), Math. Ann., 1953, **125**, № 4, 355—365 (нем.)

Автор рассматривает дифференциальное уравнение

$$w'' = P(z, w) = a_0(z)\, w^n + a_1(z)\, w^{n-1} + \cdots + a_n(z), \quad n \geqslant 2,$$

где коэффициенты $a_i(z)$ — полиномы.

Если потребовать, чтобы уравнение допускало в $|z| < \infty$ однозначное аналитическое нерациональное решение $w(z)$ и чтобы для любого конечного $z = p$ у решения имелся бы полюс, то рассматриваемое уравнение может иметь вид

$$a)\ w'' = a(z) + b(z)\, w + 6w^2.$$

или

$$б)\ w'' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2 + 2w^3,$$

причем в случае $n = 2$

$$w(z) = (z - p)^{-2} + \cdots,$$

$$a(z) = \alpha_0 z + \beta_0 + 6h^2 - h'',\ b(z) = 12h(z),$$

а в случае $n = 3$, $A = \pm 1$

$$w(z) = A(z - p)^{-1} + \cdots,$$

$$a(z) = \alpha_0 + \beta_1 zh + \beta_0 h + 2h^3 - h'',$$

$$b(z) = \beta_1 z + \beta_0 + 6h^2,\ c(z) = 6h,$$

где $h(z)$ — любой многочлен, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_0$, $\beta_1$ — некоторые постоянные.

При более частных (указанных в статье) значениях коэффициентов уравнения а) и б) либо превращаются в уравнения Пенлеве, либо могут быть проинтегрированы с помощью эллиптических функций или их вырождений, либо даже допускают рациональные решения.

Каждое из решений $w(z)$ указанных уравнений имеет конечный порядок роста:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = \sigma < \infty,$$

где $T(r, w)$ — характеристика функции $w(z)$; величина $\sigma$ указывается в некоторых частных случаях.

Рассматривая уравнение а) и используя соотношения для функции приближения $m(r, w)$, автор

устанавливает, что для каждого нерационального решения $w(z)$ имеют место следующие равенства:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,k)}{N(r,k')}=1,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{n(r,k)}{n(r,k')}=1,$$

где $N(r,a)$ — функция, указывающая среднюю плотность распределения корней уравнения $w-a=0$ в круге $|z|<r$; $n(r,a)$ — число корней того же уравнения, лежащих в том же круге. Последние равенства обобщают теорему, данную Пенлеве для частного случая.

Рассматриваются некоторые уравнения данного типа с определенными коэффициентами и для них устанавливаются полный индекс ветвления, величина порядка и характер строения самого решения.

В конце статьи изложенные в ней соображения прилагаются к уравнению Риккати и линейным дифференциальным уравнениям с рациональными коэффициентами.

При доказательстве полученных в статье результатов автор опирается в основном на книгу Р. Неванлинна «Однозначные аналитические функции», придерживаясь ее обозначений. *К. Я. Латышева*

**198. О поднормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга. Латышева К. Я.**, Наукові зап. Київськ. держ. ун-та, 1953, **12**, № 49—65

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка

$$\frac{d^ny}{dx^n}+\sum_{i=1}^{n}P_i(x)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}=0, \qquad (1)$$

коэффициенты которого разлагаются в сходящиеся или асимптотические ряды по целым убывающим степеням независимой переменной $x$:

$$P_i(x)=\sum_{\tau=0}^{\infty}p_{i\tau}x^{\beta_i-\tau}.$$

Рангом уравнения (1) называют число $p=1+\max\frac{\beta_s-\beta_0}{s}$ $(1\leqslant s\leqslant n)$.

Известно, что если ранг уравнения (1) есть целое положительное число и если все корни специальным образом составляемого характеристического уравнения, отвечающего уравнению (1), различны, то уравнение (1) имеет $n$ формальных решений в виде нормальных рядов Томе

$$y\sim e^{Q(x)}x^r\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^{-i},$$

где $Q(x)$ — многочлен, степень которого не превосходит ранга уравнения, $r$ и $c_i$ $(i=0,1,2,\ldots)$ — некоторые постоянные. Если же среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то уравнение (1) может иметь формальные решения в виде поднормальных рядов

$$y=e^{Q(x^{1/\mu})}x^r\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^{-\frac{i}{\mu}}, \qquad (2)$$

где $\mu$ — некоторое целое число не меньшее двух, $Q(x^{1/\mu})$ — многочлен относительно $x^{1/\mu}$, $r$ и $c_i$ $(i=0,1,2)$ — постоянные.

Основные результаты, полученные в работе, следующие:

1. Показано, что если ранг уравнения (1) дробный, то это уравнение может иметь формальные решения вида (2) и при отсутствии у характеристического уравнения кратных корней.

2. Даны условия, при выполнении которых дифференциальное уравнение целого ранга может быть приведено к уравнению дробного ранга.

3. Уточнена форма поднормальных рядов (2) как формальных решений уравнения (1).

Настоящая работа является продолжением прежних работ автора, посвященных построению формальных решений уравнения (1), и связана с соответствующими работами Пуанкаре, Фабри и Лава.

*В. П. Басов*

**199. Построение интегрального базиса в окрестности слабой особой точки. Кваде** (Konstruktion einer Integralbasis an einer schwach singulären Stelle. Quade W.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2/3, 88—104 (нем.)

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение $n$-го порядка

$$\sum_{\nu=0}^{n}z^{\nu}A_\nu(z)\,w^{(\nu)}=0, \qquad (1)$$

где $A_n(z)\equiv 1$, $A_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{\nu k}z^k$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$ — функции, регулярные в точке $z=0$. Точка $z=0$ — регулярная особая точка уравнения (1) (слабая особая точка). Существует два метода построения фундаментальной системы решений (интегрального базиса): редукционный метод Даламбера и метод Фробениуса (Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1951, стр. 135), о которых автор упоминает. Автор дает новый метод построения фундаментальной системы решений.

Вводится новая независимая переменная $t$ равенством $z=e^t$. Производная по $t$ представляется с помощью оператора $D$. Тогда

$$z^\nu w^{(\nu)}=\nu!\binom{D}{\nu}w$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\left[\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(e^t)\,\nu!\binom{D}{\nu}\right]w=0.$$

Используя степенные ряды для $A_\nu(e^t)$, последнее уравнение можно представить в виде

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{kt}F_k(D)\right]w=0, \qquad (2)$$

где $F_k(D)=\sum_{\nu=0}^{n}a_{\nu k}\nu!\binom{D}{\nu}$ $(k=0,1,\ldots)$ и, так как $A_n(z)\equiv 1$, $F_0(D)$ — полином $n$-й степени от $D$, остальные $F_k(D)$ степени не выше $(n-1)$-й.

$F_0(D)$ — определяющий полином. Решение ищется в виде

$$h(t)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(t)\,e^{(s+l)t}=\sum_{l=0}^{\infty}g_l(t). \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (2) имеем

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{kt}F_k(D)\right]\sum_{l=0}^{\infty}g_l(t)=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) заменяется бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}F_0(D)\,g_0&=0,\\ F_0(D)\,g_1+e^tF_1(D)\,g_0&=0,\\ F_0(D)\,g_2+e^tF_1(D)\,g_1+e^{2t}F_2(D)\,g_0&=0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Первое из этих уравнений есть линейное однородное уравнение. Если $s_1,\ldots,s_m$ — корни определяющего уравнения кратности соответственно $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, то это уравнение имеет $n$ решений вида

$$e^{s_it},\ te^{s_it},\ \ldots,\ t^{\alpha_i-1}e^{s_it}\ (i=1,\ldots,m).$$

Для каждой функции $g_0$ из системы (5) последовательно определяются $g_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ в виде $g_k(t)=P_k(t)\,e^{(s+k)t}$, причем $P_k(t)$ — полиномы степени не выше $n-1$. Таким образом, уравнение (1) имеет $n$ формальных решений вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}g_k(t)=e^{st}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)\,e^{kt}$$

или

$$z^s\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\log z)\,z^k.$$

Далее следует доказательство равномерной сходимости построенных решений с помощью мажорантного метода и доказательство их линейной независимости. В качестве примера применения нового метода рассматривается построение фундаментальной системы решений уравнения Бесселя в окрестности точки $z=0$. *Л. И. Донская*

**200. О комплексных корнях функций штурм-лиувиллевского типа. Там Цой-так** (On the complex zeros of functions of Sturm-Liouville type. Taam Choy-tak), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 837—843 (англ.)

Рассматриваются решения уравнения

$$W''(z)+Q(z)\cdot W(z)=0,$$

отличные от тождественного постоянного, и даются верхние оценки для числа нулей этих решений в той или иной замкнутой области $S$, где $S\subset D$ и $Q(z)$ есть функция, аналитическая в $D$.

Доказываются две теоремы. В первой в качестве $S$ берется круг $|z|\leqslant r$, $r<R$, $[|z|\leqslant R]\subset D$ и при условии $W(0)\neq 0$ для числа $n(r)$ нулей $W(z)$ в $S$ дается оценка

$$n(r)\leqslant\frac{1}{\ln(Rr^{-1})}\left[\ln\left(1+\frac{R\,|W'(0)|}{|W(0)|}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(R-t)\,|Q(te^{i\theta})|\,dt\,d\theta\right].$$

Как следствие этой теоремы получается, что если $Q(z)$ есть многочлен степени $k$, то при $r\to\infty$

$$|W(re^{i\theta})|=O\left(e^{Ar^{k+2}}\right),$$
$$n(r)=O\left(r^{k+2}\right).$$

Во второй теореме $S$ подчинена лишь условию, что ее граница $C$ есть замкнутая кривая, и ограничение $W(0)\neq 0$ отсутствует.

Число нулей $W(z)$ в $S$ оценивается числом подобластей специального вида, на которые $S$ может быть разделена. Число это зависит как от геометрической структуры кривой $C$, так и от величины $\sup|Q(z)|$ на $C$. Наличие двух нулей $W(z)$ в одной и той же подобласти этого вида возможно лишь при условии $Q(z)=\text{const}$. *Н. В. Ламбин*

**201. Асимптотическое решение двух дифференциальных уравнений первого порядка. Конт, Сангрен** (An asymptotic solution for a pair of first order equations. Conte S. D., Sangren W. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 696—702 (англ.)

Рассмотрена система

$$\frac{du}{dt}-[\lambda a(x)+b(x)]\,v=0,$$
$$\frac{dv}{dt}+[\lambda c(x)+d(x)]\,u=0, \qquad (1)$$

где действительные функции $b(x)$, $d(x)$ класса $C'$ и положительные неисчезающие функции $a(x)$, $c(x)$ класса $C''$ определены в $0\leqslant x\leqslant 1$; $\lambda$ — параметр, действительный или комплексный.

Построено асимптотическое решение системы (1) для больших $|\lambda|$ в виде

$$u(x)=k(x)\,[\alpha\cos\xi+\beta\sin\xi]+O(1/\lambda),$$
$$v(x)=k^{-1}(x)\,[-\alpha\sin\xi+\beta\cos\xi]+O(1/\lambda),$$

где

$$\xi(x)=\lambda h(x)+g(x),\quad h(x)=\int_0^x(ac)^{1/2}dy,$$
$$g(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{bc+ad}{(ac)^{1/2}}\,dy,\quad k(x)=\left[\frac{a(x)}{c(x)}\right]^{1/4},$$

$\alpha$ и $\beta$ — произвольные действительные постоянные.

Указано, что, используя асимптотическое решение, можно доказать следующую теорему о разложении двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряды по собственным функциям системы (1).

Теорема II. Будем решать задачу Штурма для системы (1) с граничными условиями

$$\alpha_0u(0)+\beta_0v(0)=0,\quad \alpha_1u(1)+\beta_1v(1)=0, \qquad (2)$$

где $\alpha_0$, $\beta_0$, $\alpha_1$, $\beta_1$ — действительные постоянные такие, что $|\alpha_0|+|\beta_0|\neq 0$, $|\alpha_1|+|\beta_1|\neq 0$. Соб-

ственные значения для системы (1), (2) действительны, их бесконечное количество и они расположены на интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Для каждого собственного значения $\lambda_n$ существует единственное решение $(u_n, v_n)$. Функции $u_n$, $v_n$ ортогональны в следующем смысле:

$$\int_0^1 (cu_m u_n + av_m v_n)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Если $f = [f_1(x), f_2(x)]$ — произвольные функции класса $C''$, удовлетворяющие условию (2), то имеют место разложения

$$f_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(x), \quad f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n v_n(x), \quad (3)$$

где

$$c_n = \int_0^1 (cf_1 u + af_2 v)\,dx.$$

Ряды (3) сходятся равномерно. *С. Н. Шиманов*

**202. Асимптотическое поведение решений линейного и нелинейного дифференциально-разностных уравнений.** К у к (The asymptotic behavior of the solutions of linear and nonlinear differential-difference equations. C o o k e K. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 1, 80—105 (англ.)

Рассматриваются в порядке сложности линейные уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t+1) = \left(a_0 + \frac{a_1}{t}\right)u(t) + \left(b_0 + \frac{b_1}{t}\right)u(t+1), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}u(t+1) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t+1), \quad (2)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — действительные функции действительного переменного $t$, имеющие при $t \to +\infty$ асимптотические представления

$$a(t) \sim a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots,$$

$$b(t) \sim b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \cdots,$$

и нелинейное уравнение

$$\frac{d}{dt}u(t+1) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t+1) + D(u(t),\, u(t+1)), \quad (3)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ имеют вышеуказанный вид, а

$$D(u(t),\, u(t+1)) = \sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij}(t)\,u(t)^i\,u(t+1)^j \quad (i \geqslant 0,\ j \geqslant 0)$$

($b_{ij}(t)$ — действительные функции). Во всех случаях изучается поведение решения $u(t)$ при $t \to +\infty$, которое определено при $t > t_0$ и удовлетворяет начальному условию: на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1$ $u(t) = g(t)$, где $g(t)$ на указанном отрезке — заданная непрерывная функция. Поведение решения $u(t)$ связано с корнями характеристического уравнения

$$se^s - b_0 e^s - a_0 = 0. \quad (4)$$

Т е о р е м а 1. Если $a_0 \neq -\exp(b_0 - 1)$ (при этом условии все корни уравнения (4) простые), то решению $u(t)$ уравнения (1) будут соответствовать такой корень $S_2$ уравнения (4) и такие постоянные $c_0, c_1, c_2, \ldots$, что при любом $m$ при $t \to +\infty$

$$u(t+1) = \operatorname{Re}\left\{t^{\delta_2} e^{S_2 t}\left(c_0 + \frac{c_1}{t} + \cdots + \frac{c_m}{t^m}\right)\right\} + O\left(t^{\operatorname{Re}(\delta_2)-m-1} e^{\operatorname{Re}(S_2)\,t}\right),$$

где $\delta_2$ — вычет функции

$$\frac{b_1 e^s + a_1}{se^s - b_0 e^s - a_0} \quad (5)$$

в точке $S_2$.

Показывается, что решения $u(t)$ уравнения (2) и уравнения (3) удовлетворяют соответственно интегральным уравнениям

$$u(t+1) = u_0(t+1) + \int_{t_0}^{t} \{A(t_1)\,u(t_1) + B(t_1)\,u(t_1+1)\}\,k(t, t_1)\,dt_1,$$

$$u(t+1) = u_0(t+1) + \int_{t_0}^{t} \{A(t_1)\,u(t_1) + B(t_1)\,u(t_1+1) + D(u(t_1),\, u(t_1+1))\}\,k(t, t_1)\,dt_1,$$

где

$$A(t) \sim \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \cdots, \qquad B(t) \sim \frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \cdots.$$

Решая эти интегральные уравнения методом последовательных приближений и производя оценки, автор получает теоремы:

Т е о р е м а 3. Пусть $S_1$ — корень уравнения (4) с наибольшей действительной частью. Если $a_0 \neq -\exp(b_0 - 1)$, то решение $u(t)$ уравнения (2) при $t \to +\infty$ имеет вид

$$u(t) = O\left(t^{\operatorname{Re}(\delta_1)}\, e^{\operatorname{Re}(S_1)\,t}\right), \quad (6)$$

где $\delta_1$ — вычет функции (5) в точке $S_1$.

Т е о р е м а 4. Пусть для уравнения (3) выполнены следующие условия: а) $\operatorname{Re}(S_1) < 0$, б) $|b_{ij}(t)| \leqslant b_{ij}$, в) $\sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij} z_1^i z_2^j$ сходится для достаточно малых $|z_1|$ и $|z_2|$. Тогда имеется постоянная $C$, зависящая только от уравнения (3), такая, что если г) $\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+1} |g(t)| \leqslant C$, то решение $u(t)$ уравнения (3) имеет форму (6).

Уравнение вида (3) изучалось ранее Белманом (Bellman R., Ann. Math., 1949, **50**, 347—355), показавшим, что если $a(t) \to a_0$, $b(t) \to b_0$ при $t \to +\infty$, функции $b_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и все корни уравнения (4) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) \leqslant -\lambda < 0$, то решение $u(t)$

уравнения (3) при условии, что $\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+1} |g(t)|$ достаточно мал, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Метод автора аналогичен методу Белмана. В основе лежит применение преобразования Лапласа и изучение аналитических свойств, связанных с этим преобразованием функций.

Библиография, 18 названий. *А. Ф. Леонтьев*

**203. О строгой эргодичности динамических систем. Грабарь М. И.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 9—12

Как известно, уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 \Phi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \alpha_2 \Phi(x, y), \qquad (1)$$

где $\Phi(x, y)$ — непрерывная положительная функция с периодом $2\pi$ по каждому из своих аргументов и $\alpha_1$, $\alpha_2$ — действительные числа с иррациональным отношением $\gamma$, определяют на двумерном торе с координатами $x$, $y$, приведенными по модулю $2\pi$, динамическую систему, все траектории которой всюду плотны. Предположим, что система эта не является почти периодической, и рассмотрим на трехмерном торе с координатами $x$, $y$, $z$, приведенными по модулю $2\pi$, динамическую систему, определяемую уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha_2, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\lambda}{\Phi(x, y)}, \qquad (2)$$

где $\lambda$ — действительное число. Если $\lambda \neq 0$, то и у этой системы все траектории всюду плотны. Основной результат автора состоит в том, что система (2) в том и только в том случае обладает единственной (нормированной) инвариантной мерой, если среди чисел $k\lambda$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) нет собственных значений системы (1). Если такие значения имеются, то обычный объем будет для системы (2) разложимой инвариантной мерой.

Существование систем вида (1), не являющихся почти периодическими, первым обнаружил Марков (Марков А. А., Труды Второго Всесоюзного математического съезда, Л., 24—30 июня 1934 г., Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, т. II, 227—231). Существование систем вида (1), не являющихся почти периодическими и обладающих, тем не менее, ненулевыми собственными значениями, следует из результатов А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1954, 4411); последний установил существование систем вида (1) с чисто точечным спектром, все собственные функции которых, принадлежащие к ненулевым собственным значениям, всюду разрывны. У обоих этих авторов функция $\Phi(x, y)$ аналитична. Таким образом, в реферируемой работе устанавливается существование на трехмерном торе аналитической динамической системы, обладающей следующими двумя свойствами: (а) все траектории системы всюду плотны; (б) система допускает более одной инвариантной меры. Все ранее известные динамические системы с этими двумя свойствами были определены в фазовых пространствах, не являющихся многообразиями.

Полные доказательства в работе не приведены. *В. А. Рохлин*

**204. Глобальное поведение дифференциальных уравнений на $n$-мерном многообразии. Хас** (The global behavior of differential equations on $n$-dimensional manifolds. Haas Felix), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 12, 1258—1260 (англ.)

Рассматривается общее поведение характеристик системы обыкновенных дифференциальных уравнений $(M_n, V)$, заданной на компактном $n$-мерном дважды дифференцируемом многообразии $M_n$ и определяющей векторное поле $V$, причем предполагается, что: 1) компоненты поля непрерывны, 2) удовлетворяют условиям Липшица и 3) особые точки поля образуют компактное множество. В этих предположениях для положительных полухарактеристик $C^+$ системы $(M_n, V)$ автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 1. Если $M_n$ — связное множество с эйлеровой характеристикой, отличной от нуля, то $\omega$-предельное множество $\overline{C}$ полухарактеристики $C^+$, не содержащее особых точек, нигде не плотно на $M_n$.

Теорема 2. Если $\omega$-предельное множество $\overline{C}$ полухарактеристики $C^+$ свободно от особых точек и содержит открытое множество $G$, то для любой точки $q$ характеристики $E^+ \subset \overline{C}$ существует следующая за ней (в смысле значения параметра $t$) точка $q' \in E^+$ такая, что $q' \in G$.

Теорема 3. Пусть $M_n = (M_{n-1} \times S_1)$, где $M_{n-1}$ — $(n-1)$-мерное многообразие с эйлеровой характеристикой, отличной от нуля, и $S_1$ — окружность, точки которой определяются посредством угловой координаты $\theta$. Если в силу системы $(M_n, V)$ на $M_n$ выполнено неравенство $d\theta/dt > 0$, то эта система дифференциальных уравнений имеет периодическое решение.

Следует отметить, что для случая трехмерного пространства топологическая структура системы траекторий на замкнутых ориентируемых поверхностях любого жанра изучалась А. Г. Майером (Матем. сб., 1943, **12**(54), № 1, 71—84).

*Б. П. Демидович*

**205. Асимптотические движения материальной точки, движущейся в поле отталкивающих сил. Миколайская С.**, Бюл. Польской акад. наук, Отд. III, 1953, **1**, № 1—2, 11—13

Рассматривается нелинейная система уравнений

$$\ddot{X} = F(t, X, \dot{X}), \qquad (1)$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\dot{X} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$ и матрица $F = F(t, X, \dot{X})$ такова, что обеспечивается существование и единственность решений системы (1), причем для всех $(t, X, \dot{X})$ выполнено условие

$$(X, F) \geqslant 0 \qquad (2)$$

(«отталкивающее поле»). Используя топологический принцип Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, **20**, 279—313), автор приводит основную идею доказательства следующего предложения: при выполнении условия (2) в пространстве $E^n\{x\}$ существует по меньшей мере $n$-параметрическое семейство движений $X = X(t)$, расстояние которых $\rho(t) = |X(t)|$ от начала координат уменьшается, в широком смысле, при $t \geqslant t_0$.

В тексте содержится неточность: если $\frac{d}{dt}(X, Y) > 0$ и $a < 0 < b$, то, очевидно, движения $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, начинающиеся на поверхности $(X, Y) = a$, при возрастающем $t$ входят в область $G = \{a \leqslant (X, Y) \leqslant b\}$, а начинающиеся на поверхности $(X, Y) = b$ — выходят из этой области (у автора наоборот). На дальнейших рассуждениях это обстоятельство не отражается.

Для системы линейных уравнений соответствующая теорема была доказана Винтнером (Wintner A., Amer. J. Math., 1949, **71**, № 2, 362—366).

*Б. П. Демидович*

**206. Анализ статически устойчивых динамических систем. Стебаков С. А.** Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 3, 455—458

Рассматривается динамическая система вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $x_0 \equiv x_n$ и функции $f_i$ непрерывны вместе со своими производными $\partial f_i/\partial x_i$ и $\partial f_i/\partial x_{i-1}$, причем точка $O(0, \ldots, 0)$ является точкой покоя системы. Предполагая, что функции $f_i$ определены с точностью до некоторого класса вариаций, ставится следующая задача: подобрать систему (1) так, чтобы заданная окрестность $U(O)$ ее точки покоя $O$ принадлежала бы области притяжения этой точки, т. е. чтобы решение $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\} \to 0$ при $t \to +\infty$, если только $x(t_0) \in U(O)$. Используя «оболочки Ляпунова» (т. е. замкнутые поверхности $S$, обладающие тем свойством, что если $x(t_0) \in S$, то $x(t)$ при всех достаточно больших $t$ лежит внутри этой поверхности), имеющие форму ящиков, автор доказывает, что искомую динамическую систему, с большой свободой выбора, можно построить, разбивая координатные плоскости $P_{i,\ i-1} = \{0, \ldots, 0, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots, 0\}$ на некоторые области и выбирая надлежащим образом знаки функций $f_i$ в этих областях. Способ построения таков, что если функции $f_i$ заданы, то выполнение соответствующих условий легко проверить. Разбирается также один частный случай, для которого система «оболочек Ляпунова» в форме ящиков наверняка существует.

*Б. П. Демидович*

**207. О распределении особых точек системы $n$ дифференциальных уравнений ($n \geqslant 3$). Шестаков А. А.** Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1953, **27**, 41—50

Статья содержит развитие исследований А. Пуанкаре (О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.—Л., 1947 г., гл. XIII, XVIII) о распределении особых точек системы $n$ дифференциальных уравнений внутри $(n-1)$-мерного многообразия.

Рассматривается система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n), \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $X_s$ и $X_{sj} = \partial X_s/\partial x_j$ непрерывны и ограничены в ограниченной области

$$F(x_1, \ldots, x_n) < 0 \qquad (2)$$

$n$-мерного пространства. Составляется кронекерова характеристика $\chi$ системы функций

$$F, \varphi = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \psi_i = X_i - \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Для системы уравнений $\partial x_s/\partial t = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k$, $s = 1, \ldots, n$, с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которой имеет простые вещественные корни, получено выражение

$$\chi(F, \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i} \left[ \lambda \frac{d\Pi(\lambda_i - \lambda)}{d\lambda} \right].$$

Применение результатов к системе двух уравнений дает следующую формулу для распределения особых точек в (2): $\sum_{F<0} i(O_\alpha) = \frac{1}{2}(i - e) + K$, где $i$ и $e$ соответственно числа внутренних и внешних точек касания интегральных кривых с кривой $F(x_1, x_2) = 0$ и $i(O_\alpha) > 0$ для узлов, фокусов и центров, $i(O_\alpha) < 0$ для сёдел; $K$ — кронекерова характеристика линий $F = 0$.

*И. М. Минкевич*

**208. Обобщение понятия «седла» для системы двух дифференциальных уравнений с тремя переменными. Америо** (Extension of the notion of «saddle point» to systems of two differential equations in three variables. Amerio Luigi), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 4, 435—454 (англ.)

Рассматривается система

$$x' = f(t, x, y), \quad y' = g(t, x, y), \qquad (1)$$

где: а) функции $f = f(t, x, y)$ и $g = g(t, x, y)$ аналитические относительно переменных $(x, y)$ в области: $-\infty < t < +\infty$, $(x, y) \in \Omega$ ($\Omega$ — открытое множество плоскости $Oxy$), непрерывные и ограниченные вместе со своими производными $f_x$, $f_y$, $g_x$, $g_y$, $f_{xt}$, $f_{yt}$, $g_{xt}$, $g_{yt}$ в каждой области: $-\infty < t < +\infty$, $(x, y) \in \omega \subset \Omega$ ($\omega$ — компакт); б) при $-\infty < t < +\infty$, $(x, y) \in \omega$ равномерно по $t$ выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, x, y) \right| \leqslant K_\omega \delta_\omega^{-(m+n)},$$

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} g(t, x, y) \right| \leqslant K_\omega \delta_\omega^{-(m+n)}$$

($m, n = 0, 1, 2, \ldots$; $K_\omega$, $\delta_\omega$ — постоянные); в) система (1) имеет нулевое решение $x = x^*(t) \equiv 0$, $y = y^*(t) \equiv 0$ $(-\infty < t < +\infty)$, т. е. $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) \equiv 0$.

Исследуется вопрос, при каких условиях в пространстве $Otxy$ существуют две поверхности $\zeta(t, x, y) = 0$ $(S)$ и $\zeta^*(t, x, y) = 0$ $(S^*)$, проходящие через ось $t$, целиком заполненные интегральными кривыми системы (1), постоянно остающимися на этих поверхностях, и разбивающие некоторую окрестность $U$ оси $t$ на 4 области такие, что всякая интегральная кривая системы (1), имеющая хотя бы одну общую точку с какой-нибудь из этих областей, принадлежит ей до тех пор, пока она находится в $U$ («обобщенное седло»).

Автор доказывает, что необходимым условием для существования обобщенного седла системы (1) является выполнение при $-\infty < t < +\infty$ неравенства

$$\left\{(f_y - g_x)^2 - 4\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right\}_{(t,0,0)} \geqslant r > 0 \qquad (2)$$

($r$ — постоянная). Если $f_x(t, 0, 0)$, $f_y(t, 0, 0)$, $g_x(t, 0, 0)$ и $g_y(t, 0, 0)$ изменяются не слишком быстро вместе с $t$, то условие (2) является также достаточным для наличия обобщенного седла системы (1).

Метод доказательства состоит в нахождении интегральных поверхностей $\zeta(t, x, y) = 0$ соответствующего уравнения в частных производных

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} f(t, x, y) = g(t, x, y),$$

проходящих через ось $t$, причем система (1) предварительно преобразуется с помощью замены переменных.

Если функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ периодические относительно $t$ с общим периодом $T$, то функции $\overline{\zeta}(t, x, y)$ и $\zeta^*(t, x, y)$ являются также периодическими относительно $t$ с тем же периодом $T$.

Отсюда, в частности, получается обобщение известного результата: для системы (1) в гиперболическом случае, для любого фиксированного значения $t_0$, существуют две и только две кривые $\overline{\zeta}(t_0, 0, 0) = 0$ и $\zeta^*(t_0, 0, 0) = 0$, инвариантные относительно преобразования

$$x_1 = x(t_0 + T, 0, 0), \quad y_1 = y(t_0 + T, 0, 0)$$

(Poincaré H., Oeuvres, T. I, 202—204; Hadamard J., Bull. Soc. Math. France, 1901, **29**, 224—228).

*Б. П. Демидович*

**209. Метод сравнения в качественной теории неполного дифференциального уравнения второго порядка.** Ельшин М. И., Матем. сб., 1954, **34 (76)**, № 2, 323—330

Указывается на возможность изучения решений системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y) \qquad (1)$$

путем сравнения с решениями систем

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = F(x, u) \text{ и } \dot{x} = v, \quad \dot{v} = \Phi(x, v) \qquad (2)$$

в предположении, что: а) системы (1) и (2) обладают свойствами существования и единственности решений; б) особые точки всех трех систем (1) и (2), расположенные на оси $x$, совпадают по положению, и на характер совпадающих особых точек наложены некоторые ограничения; в) для всех $x$ и $z$ ($z \neq 0$) имеют место неравенства

$$\frac{F(x, z)}{z} < \frac{f(x, z)}{z} < \frac{\Phi(x, z)}{z}.$$

Приводятся некоторые простые теоремы о взаимном расположении траекторий сравниваемых систем на несколько обобщенной «фазовой» плоскости (в терминологии автора — «риманова поверхность»).

*А. В. Драгилев*

**210. О поведении в целом интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений.** Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 2, 149—154

Рассматривается поведение в целом решений системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \ldots \qquad (1)$$

Функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и $X(0, 0) = Y(0, 0) = 0$.

Автор делает заключения о поведении решений (1) на основании предположений относительно величины $\sqrt{X^2 + Y^2}$ и расположения корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Как известно, в случае линейных $X, Y$ это уравнение полностью характеризует асимптотическое поведение решений (1).

Вводятся обозначения: $m(r) = \min \sqrt{X^2 + Y^2}$ на окружности $x^2 + y^2 = r^2$, $N = \max \sqrt{X^2 + Y^2}$ на окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Показывается (теорема 2.1), что круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ целиком лежит в области притяжения точки $x = y = 0$, если корни $\lambda_i$, $i = 1, 2$, уравнения (2) имеют отрицательные действительные части в круге $x^2 + y^2 \leqslant R_1^2$, где $R_1$ выбрано из условия $\int_R^{R_1} m(r)\, dr > 2\pi RN$.

В частности (теорема 2.2), решение $x = y = 0$ будет асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, во всех точках плоскости и

$$\int_0^{\infty} m(r)\, dr = \infty.$$

Как следствие получается следующий результат: функции $u = X(x, y)$, $v = Y(x, y)$ осуществляют взаимно однозначное отображение плоскости $xy$ на всю плоскость $uv$, если во всех точках плоскости $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, а $\lim\limits_{r \to \infty} m(r) = \infty$.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) распространяется на случай, когда $X$, $Y$ не дифференцируемы по переменной $x$, но имеют по ней в точке $x = y = 0$ конечные верхние и нижние производные. Указывается на возможность перенесения на такие системы теорем 2.1 и 2.2.

*В. И. Бурдина*

**211. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.** Малкин И. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 2, 129—138

Рассматривается система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

$$X_i(t, 0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

определенная в области

$$t \leqslant 0, \; x \leqslant H^2, \; x = \sum_{i=0}^{n} x_i^2. \qquad (2)$$

Предполагается, что правые части системы (1) непрерывны по всем аргументам и допускают непрерывные и ограниченные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$.

Как известно, в случае асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (1) можно указать положительное число $\delta$ такое, что при всех начальных значениях, лежащих в области

$$x \leqslant \delta^2, \; t_0 \geqslant 0, \tag{3}$$

решение системы (1) $x_i = x_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

**Теорема 1.** Если существует такое положительное число $\delta$, что соотношения (4) выполняются равномерно относительно $x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0$, лежащих в области (3), то существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений (1), есть функция определенно отрицательная.

Если правые части системы (1) есть периодические функции $t$ (одного и того же периода) или совсем не зависят от $t$, указанная в теореме 1 равномерность всегда имеет место в случае асимптотической устойчивости. Поэтому теорема Массера (Massera I. L., Ann. Math., 1949, **50**, № 3, 705—721), устанавливающая наличие функции Ляпунова в указанном случае, непосредственно следует из теоремы 1. Доказано также обращение теоремы 1, а именно, в теореме 2 устанавливается, что существование функции Ляпунова со свойствами, указанными в теореме 1, влечет за собой равномерность соотношения (4) по совокупности начальных значений $x_i^0$, $t_0$.

Автор указывает далее, что при выполнении условий теоремы 2 равномерность соотношений (4) по $t_0$ установил К. П. Персидский, а равномерность тех же соотношений по $x_i^0$ — Массера.

Автор устанавливает, что наличие функции Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ со свойствами, указанными в теореме 1, влечет за собой наличие функции Ляпунова с теми же свойствами, но имеющей, кроме того, ограниченные частные производные по $x_i$ в некоторой окрестности начала координат при $t > 0$. Отсюда автор получает следующую теорему: Если тривиальное решение $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (1) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и если при этом соотношения (4) выполняются равномерно относительно $x_i^0$, $t_0$, лежащих в области (3), то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях. *Е. А. Барбашин*

**212. К теории устойчивости движения. Кузьмин П. А.** Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 125—127

Рассматривается линейная система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

с переменными (ограниченными, непрерывными) коэффициентами $p_{sj}(t)$.

Используя одну идею Н. Г. Четаева, автор доказывает следующие предложения.

1. Если уравнения возмущенного движения таковы, что для некоторой определенно положительной функции $V$ существует область $V' \leqslant 0$, в которой можно выделить $n$-мерную область $W \geqslant 0$, не пустую при численно сколь угодно малых $x_s$ и при всех $t \geqslant t_0$ и такую, что на ее границе $W = 0$ производная $W' \geqslant 0$, то невозмущенное движение устойчиво.

2. Если сверх этих условий функция $V$ допускает бесконечно малый высший предел, а функция $V'$ в области $W \geqslant 0$ определенно отрицательна, то устойчивость будет асимптотической.

*Н. Н. Красовский*

**213. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Старжинский В. М.**, Инженерный сб., 1954, 18, 119—138

Некоторые результаты Ляпунова, относящиеся к уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, распространяются на систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11} x_1 + p_{12} x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = p_{21} x_1 + p_{22} x_2, \tag{1}$$

где $p_{ij}$ — периодические непрерывные функции $t$ с периодом $\omega$, причем функции $p_{12}$ и $p_{21}$ знакопостоянны.

Система (1) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{dt} = Py, \quad \frac{dy}{dt} = Qx - ay, \tag{2}$$

где $P$ и $Q$ — некоторые знакопостоянные периодические функции, а $a \geqslant 0$ — постоянная, определяемая соотношением $a\omega = \alpha - \beta$, в котором $\alpha$ и $\beta$ — средние значения функций $p_{11}$ и $p_{22}$. Коэффициент $A$ в характеристическом уравнении

$$\rho^2 - (1 + e^{-a\omega}) A\rho + e^{-a\omega} = 0$$

системы (2) определяется абсолютно сходящимся рядом

$$A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n.$$

Для коэффициентов этого ряда устанавливается «основное неравенство»

$$|A_n| < (1 + e^{-a\omega}) \frac{|A_1|}{n} |A_{n-1}| \quad (n \geqslant 2),$$

аналогичное неравенству, установленному Ляпуновым. Для частных случаев указываются более сильные неравенства. При помощи основного неравенства даются оценки зон устойчивости для системы (1). Отдельно рассматриваются случай $a = 0$ и случай одного уравнения второго порядка вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + p(t)x = 0 \quad (p(t) = -Q(t) \geqslant 0),$$

для которого уточняются результаты, полученные автором ранее (РЖМат, 1953, 1190). В частности

рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + C(1 + \lambda \cos t + \mu \cos 2t)\, x = 0$$
$$(a \geqslant 0,\ C > 0),$$

которое при $a = 0$ было детально изучено А. М. Ляпуновым. *И. Г. Малкин*

**214. Некоторые критические случаи устойчивости решений дифференциальных уравнений в нормированных пространствах. Ятаев М.,** Изв. АН Казах ССР, сер. астроном., физ., матем. и механ., 1953, № 3, 3—40 (русс.; резюме казах.)

В первом разделе исследуется устойчивость решения $x = y = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(t, x, y),\ \frac{dx}{dt} = F(t, x, y),$$

правые части которой — абстрактные функции некоторого полного, линейного, нормированного пространства $E$. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(t, x) + L(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(t, y) + N(t, x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $P(t, x)$ и $Q(t, y)$ — линейные функции относительно $x$ и $y$, непрерывные по $t$, а $L(t, x, y)$ и $N(t, x, y)$ — члены более высокого порядка малости, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \| L(t, x, y) \| &\leqslant \| x \| \gamma(\| x \|, \| y \|), \\ \| N(t, x, y) \| &\leqslant B \| x \|, \end{aligned} \tag{2}$$

где $B \geqslant 1$, а $\gamma(\| x \|, \| y \|) \to 0$ при $\| x \| + \| y \| \to 0$. Полагая, что решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $y = y(t, t_0, y_0)$ первых приближений $dx/dt = P(t, x)$, $dy/dt = Q(t, y)$ удовлетворяют при всех $t \geqslant t_0$ условиям

$$\begin{aligned} \| x(t, t_0, x_0) \| &\leqslant \| x_0 \| De^{-\alpha(t - t_0)}, \\ \| y(t, t_0, y_0) \| &\leqslant \| y_0 \| \cdot k, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha > 0$, $D \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ — некоторые постоянные, не зависящие от $t_0$, $x_0$, $y_0$, автор доказывает теорему 4:

При выполнении условий (2) и (3) решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (1) устойчиво и выполняются равенства

$$\lim_{t \to \infty} \| \varphi(t) \| = 0,\ \lim_{t \to \infty} [\psi(t) - y(t, t_0, y_0)] = e,$$

где $e$ — постоянная точка из $E$, зависящая от $t_0$, $x_0$, $y_0$, а также от $L(t, x, y)$ и $N(t, x, y)$.

Во втором разделе статьи доказана теорема об условной устойчивости решения $x = y = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Q(t, y) + \omega(t, x) + N(t, x) + M(t, x, y), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t, x) + L(t, x, y), \end{aligned} \tag{4}$$

где на правые части наложены некоторые условия.

В третьем разделе рассматривается уравнение

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z\{t + \Delta t, x + \Delta t[P(t, x) + L(t, x, z) + \varepsilon]\} - z(t, x)}{\Delta t} = Q(t, z) + \omega(t, x) + N(t, x, z), \tag{5}$$

где $\varepsilon$ — любая точка из $E$, зависящая от $\Delta t$ и удовлетворяющая условию $\| \varepsilon \| \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Доказана теорема 6:

При выполнении некоторых условий относительно функций $L(t, x, z)$, $N(t, x, z)$, $P(t, x)$, $Q(t, z)$ и $\omega(t, x)$ найдется такое $\nu > 0$, что для всех значений $t \geqslant 0$ и $\| x \| \leqslant \nu$ существует ограниченная функция $z(t, x)$, являющаяся решением уравнения (5), причем при $\| x \| = 0$ имеет место равенство $\| z(t, x) \| = 0$.

На основании теоремы 6 доказывается, что в зависимости от характера системы уравнений (4) будет иметь место неустойчивость или устойчивость (асимптотическая устойчивость) ее решения $x = y = 0$.

Библиография, 18 названий. *С. И. Горшин*

**215. О взаимодействии нелинейных колебаний. Минорский** (On interaction of non-linear oscillations. Minorsky N.), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 2, 147—165 (англ.)

Исследуются вопросы взаимного влияния нелинейных колебаний при помощи стробоскопического метода, заключающегося в том, что систему уравнений, описывающую нелинейные колебания,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, t),\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t), \tag{1}$$

путем замены $\rho = x^2 + y^2$, $\psi = \operatorname{arc\,tg}\, y/x$ приводят сначала к уравнениям вида

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho, \psi, t),\ \frac{d\psi}{dt} = g(\rho, \psi, t). \tag{2}$$

Затем рассматривают «стробоскопическое изображение» уравнений (2) в форме

$$\frac{d\rho}{d\tau} = F(\rho, \varphi),\ \frac{d\varphi}{d\tau} = G(\rho, \varphi), \tag{3}$$

где $\varphi$ — фаза колебания.

Замена системы (2) системой (3) оправдывается следующими важными соотношениями между ними:

А. существование устойчивой особой точки уравнений (3) указывает на наличие устойчивого периодического решения системы (2);

Б. координаты $\rho_0$ и $\varphi_0$ особой точки являются амплитудой и фазой этого периодического решения.

При помощи стробоскопического метода рассмотрено взаимодействие нелинейных колебаний на примере уравнения Ван-дер-Поля — Матье

$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + [1 + (a - cx^2)\cos 2t]\, x = 0, \tag{4}$$

которое носит такое название ввиду того, что при $a = c = 0$ оно вырождается в уравнение Ван-дер-Поля, а при $e = c = 0$ — в уравнение Матье

Для уравнения (4) составляется «стробоскопическое изображение»

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \frac{1}{4}[E(4 - \rho) + (C\rho - 2A)\sin 2\varphi], \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{4}(C\rho - A)\cos 2\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A = a/\mu$, $C = c/\mu$, $E = e/\mu$, $\mu$ — малый параметр.

Анализируя особые точки системы (5), а также составляя условия устойчивости $\rho_0$ и $\varphi_0$, автор подробно разбирает все возможные режимы в системе, описываемой уравнением (4), при различных соотношениях между величинами $a$, $c$, $e$.

*Ю. А. Митропольский*

**216. О нелинейных колебаниях в системах с одной или более степенями свободы. Кастро** (Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in uno o più gradi di libertà. Castro Antonio de), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 294—304 (итал.)

Доказывается существование единственного периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0 \qquad (1)$$

или соответствующей системы первого порядка

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -f(x, v, t) - g(x) \qquad (2)$$

при выполнении условий:
1) $f(x, v, t)$, $g(x)$ — непрерывные функции своих аргументов;
2) $f(x, v, t)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям Липшица в любой ограниченной области $(x, v)$;
3) $g(x) = -g(-x)$, $g(x) \neq 0$ для $x \neq 0$, $\lim\limits_{x=\infty} g(x) = \infty$;
4) существуют положительные постоянные $a$, $E$ и функции $\varphi_1(x, v)$, $\varphi_2(x, v)$, непрерывные и удовлетворяющие условиям Липшица, такие что:
$f(x, v, t) > 0$ для $x > a$, $v \geqslant 0$ и для $x < -a$, $v \geqslant E$,
$f(x, v, t) < 0$ для $x > a$, $v \leqslant -E$ и для $x < -a$, $v \leqslant 0$,
а также

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_i(x, v)}{v}\, dx \geqslant \alpha > 0 \quad (t = 1, 2)$$

для произвольной непрерывной функции $v(x)$ ($|v(x)| > E$) и

$$0 < \frac{\varphi_1(x, v)}{v} < A \text{ при } x > a,\ v > E,$$

$$0 < \frac{\varphi_2(x, v)}{v} < A \text{ при } x < -a,\ v < -E;$$

5) для положительных постоянных $e$, $c$, $b$, $N$, определяемых равенствами

$$g(e) = \frac{AE^2}{\alpha},\ G(c) = \frac{1}{2}E^2 + G(e)\ \left(G(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi\right),$$

$$b = \max(a, c),\ N = 2\,\frac{G(b)}{\alpha},$$

выполняются условия

$$f(x, v, t) > \varphi_1(x, v) \text{ для } |x| < b,\ v > N,$$
$$f(x, v, t) < \varphi_2(x, v) \text{ для } |x| < b,\ v < -N;$$

6) $f(x, v, t)$ — функция периодическая по $t$ с периодом $T$, $f(0, 0, t) \not\equiv 0$.

Для системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)\,\dot{x}_1 + g_1(x_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)\,\dot{x}_1 + g_2(x_2) &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

периодическое решение существует, если выполнены условия вида

а) $g_i(x_i)\,x_i > 0$, $x_i \neq 0$; $\lim g_i(x) = \infty$;

б) $f_i(0, 0, x_2, v_2) < 0$, $f_2(x_1, v_1, 0, 0) < 0$;

в) существуют две функции $\varphi_i(x_i, v_i)$

$$(\varphi_i(x_i, v_i) = \varphi_i(-x_i, -v_i))\ (i = 1, 2),$$

непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица по двум аргументам, причем $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2) > \varphi_i(x_1, v_1)$, и существуют четыре константы $a_i$, $b_i$, $b_i \geqslant a_i$, такие, что $\varphi_i(x_i, v_i) \geqslant 0$ для $|x_i| \geqslant a_i$,

$$\int_{-a_i}^{b_i} \varphi_i(x_i, v_i)\, dx_i \geqslant \alpha > 0$$

для произвольной непрерывной функции $v_i(x)$. Другой критерий для системы уравнений был дан Коломбо (Colombo G., Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1952, 21, 64—98). *Ю. А. Митропольский*

**217. Операторный анализ нелинейных систем. Грант** (Operational analysis of nonlinear systems. Grant Robert B.), Texas J. Sci., 1953, **5**, № 2, 198—203 (англ.)

Операторным методом находятся удовлетворяющие некоторым ограничениям периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + g(x, \dot{x}) = F\cos(\omega t + \varphi)$$

в случаях, когда
1) $g(x, \dot{x}) = D\,\mathrm{sign}\,\dot{x}$ (наличие кулонова трения);
2) при $\dot{x} > 0$

$$g(x, \dot{x}) = g(x) = \begin{cases} \varepsilon(A + x) \text{ для } -A \leqslant x \leqslant 0, \\ \varepsilon(A - x) \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant A, \\ 0 \text{ вне отрезка } [-A, A] \end{cases}$$

(здесь $A$ — амплитуда колебания, $\varepsilon > 0$);
при $\dot{x} < 0$ $g(x, \dot{x}) = -g(x, -\dot{x})$ (наличие гистерезиса). *А. В. Драгилев*

**218. О периодических решениях дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования, содержащих чувствительный элемент с сухим трением. Воронов А. А.**, Автоматика и телемеханика, 1953, 14, № 1, 120—128

В заметке Б. А. Рябова (Докл. АН СССР, 1950, 73, № 2, 283—286) процессы в системе, отличающейся от линейной наличием сухого трения, действующего вдоль одной из обобщенных координат, описывались уравнениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_{kj}(p)\, x_k = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_{kn}(p)\, x_k = -F_0\,\mathrm{sign}(p x_n)$$

$$(j = 1, \ldots, n-1;\ p = \frac{d}{dt},$$

$$F_0 = \mathrm{const} > 0;\ P_{km} = a_{km}p^2 + b_{km}p + c_{km};$$

$a$, $b$ и $c$ — действительные числа), и определялись периодические решения системы (1).

В реферируемой статье указывается, что система (1) не учитывает наличия зон застоя для координаты $x_n$ и поэтому описывает движения лишь при условии $\dot{x}_n \neq 0$ или

$$\dot{x}_n = 0,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{k=n-1} P_{kn}(p)\, x_k + P_{nn}(0)\, x_n \right| > F_0.$$

При обратном знаке последнего неравенства система (1) должна быть заменена системой

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} P_{kj}(p)\, x_k = 0,$$

$$x_n = \text{const} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

На двух простейших примерах показывается, что допущенная Б. А. Рябовым ошибка существенна, как бы мало ни было $F_0$. Отмечается наличие ошибки и при отыскании периодических решений системы (1): Б. А. Рябов считает, что все корни уравнения периодов соответствуют периодическим решениям, в действительности же им соответствуют только корни уравнения периодов, удовлетворяющие дополнительному условию (так называемому условию правильного переключения), которое обеспечивает то направление начальной скорости $\dot{x}_{n_0}$, которое было принято при выводе уравнения периодов. *М. А. Айзерман*

219. **К теории колебаний квазилинейных систем. Шиманов С. Н.**, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 155—162

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1} x_1 + \ldots + a_{sn} x_n + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(s = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $a_{si}$ — постоянные (не зависящие от $\mu$), $\mu$ — параметр, $f_s$ — функции, непрерывные, периодические с периодом $2\pi$ относительно $t$, допускающие непрерывные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ в рассматриваемой области. При малых значениях параметра $\mu$ доказывается существование периодического решения с периодом $2\pi$ системы (1), непрерывно зависящего от параметра $\mu$ и при $\mu \to 0$ обращающегося в некоторое периодическое решение соответствующей линейной системы

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = a_{s1} x_1^{(0)} + \ldots + a_{sn} x_n^{(0)} \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (2)$$

имеющей нулевые и чисто мнимые характеристические числа $iN$, где $N$ — целое число. Периодическое решение системы (1) строится методом последовательных приближений. Этим автор обобщает и упрощает исследование И. Г. Малкина (Прикл матем. и механика, 1950, 14, № 4, 353—370), в котором получен такой же результат при дополнительном предположении, что частные производные от $f_s$ по $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям Коши — Липшица. *Н. П. Еругин*

220. **О двух теоремах структурной устойчивости линейных систем регулирования с дискретными параметрами. Мамедов И. Г.**, Автоматика и телемеханика, 1953, 14, № 1, 96—101

Автор приводит итоги анализа некоторых конкретных систем автоматического регулирования, проведенного для проверки теории структурной устойчивости И. И. Гальперина. В статье намечается также план тех алгебраических и топологических исследований, которые, по мнению автора, следует провести, чтобы построить строгую теорию структурной устойчивости. *В. В. Немыцкий*

221. **Один метод интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих колебания механических систем с распределенным параметром. Зубов В. И.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 2, 69—75

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k(t) + m_s \varphi(t) + n_s \psi(t-1) \quad (1)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $$\psi(t) = a\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_k(t),$$

$$\varphi(t+1) = b\psi(t-1) + \sum_{k=1}^{n} c_{2k} x_k(t)$$

и $a_{sk}$, $m_s$, $n_s$, $a$, $b$, $c_{1k}$, $c_{2k}$ — постоянные коэффициенты, с начальными условиями

$$x_s(t_0) = x_{s0} \text{ и } \varphi(t) = g_1(t),$$

$$\psi(t-1) = g_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — заданные функции.

Эта система уравнений, являющаяся системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, записывается в матричной форме и интегрируется методом шагов (методом последовательного интегрирования), в предположении, что

$$g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0.$$

В некоторых частных случаях указан общий вид решения системы (1) на интервале $(n, n+1)$, где $n$ — целое положительное число, и в этих же случаях даны удобные признаки устойчивости тривиального решения системы (1).

Для общего случая вид решения системы (1) на интервале $(n, n+1)$ оказывается весьма сложным и в статье не приводится, указывается лишь весьма частный и не очень удобный признак асимптотической устойчивости тривиального решения. *Л. Э. Эльсгольц*

222. **Доказательство существования обобщения функции Грина. Харада** (An existence proof of the genaralized Green function. Harada Shigeharu), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 59— 63 (англ.)

Ссылаясь на то обстоятельство, что существование обобщенной функции Грина нигде в литературе не

доказано, автор строит обобщенную функцию Грина для самосопряженной дифференциальной системы, состоящей из оператора

$$L_2[u] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u, \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и $p(x) > 0$, и из одного из двух частных случаев самосопряженных граничных условий

$$\left.\begin{aligned} u(a) - \gamma u(b) &= 0 \\ p(a)u'(a) - \frac{p(b)}{\gamma}u'(b) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или

$$\left.\begin{aligned} u(a) - \gamma p(b)u'(b) &= 0 \\ p(a)u'(a) + \frac{1}{\gamma}u(b) &= 0, \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

причем из самого построения следует существование соответствующих обобщенных функций Грина.

Необходимо отметить, что существование обобщенной функции Грина для любой самосопряженной задачи в случае, если уравнение $L_n[u] = 0$ ($n = 2, 4, \ldots$) не имеет особенностей, немедленно вытекает из дискретности ее спектра, а утверждение автора об отсутствии в литературе доказательства существования обобщенной функции Грина вообще неверно (см. Буницкий, К теории функций Грина обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Одесса, 1913; Elliott, Amer. J. Math., 1928, **50**, 243—258).

Кроме того, автор считает, что граничная задача (1) и (2) не может быть двукратно разрешимой. Это, однако, неверно (например, при $\gamma = 1$ и $p(a) = p(b)$). Поэтому на случаи двукратно разрешимых систем его результаты не распространяются.

В заключение отметим, что в некоторых учебниках в методических целях решались задачи, близкие к рассматриваемым. Так, например, И. И. Привалов (Интегральные уравнения ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935) тем же методом решает аналогичную несколько более легкую задачу: построение обобщенной функции Грина для граничных условий типа Штурма. *П. Д. Калафати*

223. **Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. Бабкин Б. Н.**, Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, 239—242

Для краевой задачи

$$y'' - f(x, y) = 0, \qquad (1)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \qquad (2)$$

где $f$ непрерывна и имеет непрерывную неотрицательную производную по $y$ в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$, получены следующие результаты:

1. Доказана теорема: если функции $u(x)$ и $v(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяют условиям (2) и неравенствам $u'' - f(x, u) \geqslant 0$, $v'' - f(x, v) \leqslant 0$, то $u(x) \leqslant y(x)$, $v(x) \geqslant y(x)$ на интервале $(a, b)$. Функции $u(x)$ и $v(x)$ автор называет соответственно нижней и верхней.

2. Доказаны существование и единственность решения сформулированной задачи, существование верхних и нижних функций для уравнения (1) и дан способ их построения.

3. Приведен способ построения последовательностей верхних и нижних функций, удовлетворяющих неравенствам $u(x) \leqslant u_1(x) \leqslant \ldots \leqslant u_n(x) \leqslant \ldots \leqslant y(x) \leqslant \ldots \leqslant v_n(x) \leqslant \ldots \leqslant v_1(x) \leqslant v(x)$, и доказана равномерная сходимость их на $[a, b]$ к искомому решению $y(x)$.

4. Для задачи

$$y'' - \frac{1}{3}y^3 = x, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

исходя из подобранных верхней $v(x) \equiv 0$ и нижней $u(x) = x^2 - x$ функций, построена следующая верхняя функция:

$$v_1(x) = -16x + 16\,\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{4}x}{\operatorname{sh}\frac{1}{4}}.$$

5. Указана на возможность построения верхних и нижних функций сформулированной задачи путем применения обычного итерационного процесса к соответствующему этой задаче интегральному уравнению. *К. В. Задирака*

224. **Видоизмененная система Штурма—Лиувилля. Бауэр** (Modified Sturm-Liouville systems. Bauer W. F.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 273—283 (англ.)

Рассматривается дифференциальная система, состоящая из уравнения

$$y''(x) + [\lambda + p(x)]y(x) = 0, \qquad (1)$$

где $p(x)$ вещественна и непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и граничных условий

$$\begin{aligned} a_1 y(0) + a_2 y'(0) + a_3 y''(0) &= 0, \\ b_1 y(1) + b_2 y'(1) + b_3 y''(1) &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где коэффициенты $a_k$ и $b_k$ ($k = 1, 2, 3$) вещественны.

Используя уравнение (1), можно исключить из граничных условий $y''(0)$ и $y''(1)$; тогда коэффициенты при $y(0)$ и $y(1)$ будут зависеть от параметра $\lambda$.

При $a_2 a_3 \leqslant 0$ и $b_2 b_3 \geqslant 0$ система (1), (2) имеет только вещественные и простые собственные числа. В этом случае она называется нормальной. Нормальные системы обнаруживают полную аналогию с системами Штурма-Лиувилля, вплоть до теоремы о разложении произвольной функции в ряды по собственным функциям задачи (1), (2). При этом автор вводит вместо обычного следующее определение скалярного произведения двух функций:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx - \frac{a_3}{a_2}f(0)\,g(0) + \frac{b_3}{b_2}f(1)\,g(1) \quad \text{при } a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0,$$

если же $a_2 = 0$ или $b_2 = 0$, то член, содержащий это число, следует заменить нулем.

Но тот же результат получается, если под знаком интеграла писать $d\sigma(x)$ вместо $dx$, считая, что

$\sigma(x) = x$ при $0 < x < 1$, а на концах промежутка имеет скачки, равные $-a_3/a_2$ и $b_3/b_2$, если $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$. В случае нормальной системы эти скачки положительны.

Автору, повидимому, осталось неизвестным, что дифференциальная система (1), (2) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, y(s)\, d\sigma(s), \qquad (3)$$

где $K(x, s)$ — функция Грина оператора $-d^2/dx^2 - p(x)$, соответствующая граничным условиям

$$[a_1 - a_3 p(0)]\, y(0) + a_1 y'(0) = 0,$$
$$[b_1 - b_3 p(1)]\, y(1) + b_1 y'(1) = 0.$$

Как известно, если $\sigma(x)$ — монотонно возрастающая функция, то все основные положения теории обыкновенных интегральных уравнений сохраняют силу и для нагруженного уравнения (3). Отсюда сразу получаются все результаты автора (вещественность характеристических чисел, полнота и ортогональность фундаментальных функций и т. д.), а также и ряд новых. В частности, если $K(x, s)$ — положительно определенное ядро, то, как это следует из работы М. Г. Крейна (Сб. памяти акад. Д. А. Граве, М.—Л., 1940, 88—103), результаты автора сохраняют силу и в случае произвольных знаков отношений $a_3/a_2$ и $b_3/b_2$.

В статье указана также задача теплопроводности, которая приводит к системе (1), (2).

*И. Д. Калафати*

**225 К. Элементарные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.** Канцкий (Elementární metody řešeni obycejnych differencialnich rovnic. Kanckу Josef, 222 str., Nakladatelstvi Československé akademie věd, Praha, 1953, Cena brož. 88 Kčs.) (чеш.)

В книге популярно излагаются элементарные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В конце каждой главы решены многочисленные примеры из техники, приводящиеся к дифференциальным уравнениям.

В главе 1 даны уравнения, приводящиеся к квадратурам. Глава 2 посвящена линейным уравнениям второго порядка. После изложения общей теории этих уравнений, подробно разобрано много конкретных примеров из физики. В главе 3 рассмотрены линейные уравнения $n$-го порядка, в частности, подробно разобран метод символического решения уравнений $n$-го порядка.

В главе 4 излагается теория систем линейных уравнений (систем двух уравнений). В главе 5 излагается теория некоторых частных типов дифференциальных уравнений (например, Клеро, Лагранжа и т. п.) и приводятся примеры их решения.

*М. К. Керимов*

**226 К. Теория дифференциальных уравнений.** Чакалов (Теория на диференциалните уравнения. Чакалов Л., 236 стр.). Държавно издателство «Наука и изкуство, София, 1953 (болг.)

Учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям для высших учебных заведений, изданный литографическим способом. Изложение ясное, приведено много примеров с решениями и без решений. Общий план построения учебника приблизительно такой же, как в «Курсе дифференциальных уравнений» В. В. Степанова.

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям. В главе 1 излагается элементарная теория дифференциального уравнения первого порядка. Глава 2 посвящена теореме существования для одного уравнения. Сначала дается понятие функционального ряда, доказываются основные теоремы из теории функциональных рядов. Далее даны три различных доказательства теоремы существования, включая и доказательство Пикара.

В главе 3 разбираются различные конкретные методы интегрирования дифференциальных уравнений; дается также понятие особого решения. В главе 4 рассматриваются уравнения $n$-го порядка. Приводятся методы решения частных видов таких уравнений. В главе 5 дана теория линейных уравнений: однородного и неоднородного уравнений $n$-го порядка, линейного уравнения с постоянными коэффициентами, уравнения Эйлера. В главе 6 излагается теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь дано строгое доказательство теоремы существования, метод Лагранжа для решения неоднородной линейной системы, теория линейных систем с постоянными коэффициентами, понятие первого интеграла.

Вторая часть книги посвящена уравнениям в частных производных первого порядка. Здесь рассматриваются линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения в частных производных, геометрическая теория таких уравнений.

В главе 8 излагается теория уравнений в полных дифференциалах. Наконец, глава 9 посвящена теории уравнений вида $F(x, y, z, p, q) = 0$ (дается метод Лагранжа—Шарпи для решения таких уравнений).

*М. К. Керимов*

**227 РЕЦ. Теория устойчивости движения.** Малкин И. Г., 432 стр., Гостехиздат, М.—Л., 1952, 17 р. [Рецензия: Еругин Н. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 5, 123—127]

**228 РЕЦ. Дифференциальные уравнения.** Йейтс (Differential equations. Yates Robert C., 215 pp., Graw Hill Book Co., New York, 1953, 3 doll., 75) [Рецензия: Булиган (Boulligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 11—12, 377 (франц.)]

**229 Д. Об асимптотической устойчивости некоторых регулируемых систем с характеристическим уравнением, имеющим несколько нулевых корней.** Спасский Р. А. Автореф дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1954

**230 Д. Метод осреднения в вопросах устойчивости.** Морозов В. И Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

**231 Д. Новый метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на теории моментов.** Гаврилов Н. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1954

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**232. Об одной новой задаче математической физики. Соболев С. Л.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, 3—50

Автор рассматривает в безграничном трехмерном пространстве $\Omega$ следующую систему уравнений с частными производными, которая не является системой Ковалевской,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \times \mathbf{k}] + \operatorname{grad} p = \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = g, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ — заданный вектор, $g$ — заданный скаляр и $\mathbf{k}(0, 0, 1)$ — третий орт в декартовой системе координат. Вводится гильбертово пространство $H$ комплексных векторов в $\Omega$ с обычной метрикой. Путем построения вспомогательного вектора уравнение (2) приводится к случаю $g = 0$, и после этого система (1), (2) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P\{[\mathbf{v} \times \mathbf{k}] + \mathbf{F}\}, \tag{3}$$

где $P$ — оператор проектирования из $H$ в подпространство $I$, которое получается замыканием линеала гладких соленоидальных векторов. Решение уравнения (3) при начальном условии

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \tag{4}$$

получается в виде

$$\mathbf{v} = e^{At}\mathbf{v}_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} P\,\mathbf{F}(t_1)\,dt_1, \tag{5}$$

где оператор $A\mathbf{w} = P[\mathbf{w} \times \mathbf{k}]$ имеет норму, не превосходящую единицы.

Аналогичным образом рассматривается и задача для ограниченной области $\Omega$ при наличии некоторого однородного условия на границе. Если это условие есть равенство нулю нормальной составляющей скорости $\mathbf{v}_n$, то задача приводится опять к уравнению вида (3), где $P$ — оператор проектирования из $H$ в подпространство, которое получается замыканием линеала гладких соленоидальных векторов, каждый из которых равен нулю в некоторой соответствующей этому вектору полоске, примыкающей к границе.

При предельном условии $p = 0$ в уравнении (3) $P$ есть оператор проектирования в подпространство, получаемое замыканием линеала гладких соленоидальных внутри $\Omega$ векторов.

Наибольшую часть работы занимает решение задачи для безграничного пространства в замкнутом виде при $g \neq 0$.

Выпишем вид решения для $v_x$ и $v_z$:

$$v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2}v_x(x_0, y_0, z_0, 0) + \text{гл. зн. ц.}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{w}^{(1)})\Big|_{t=0} d\Omega + \int_t^{t_0}\left\{\frac{1}{2}F_x\Big|_{x_0, y_0, z_0, t_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\text{гл. зн. ц.}\iiint_\Omega [(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{F}) + q^{(1)} g]\,d\Omega\right\} dt,$$

$$v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\text{гл. зн. д.}\iiint_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{w}^{(3)})\Big|_{t=0} d\Omega + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0}\left\{\text{гл. зн. д.}\iiint_\Omega [(\mathbf{w}^{(3)}\,\mathbf{F}) + q^{(3)} g]\,d\Omega\right\} dt,$$

при условии, что $\mathbf{F}$ — соленоидальный вектор $J$ (это ограничение на $\mathbf{F}$ не существенно, ибо градиентную часть $\mathbf{F}$ можно включить в уравнении (1) в $p$).

Составляющие векторов $\mathbf{w}^{(i)}$ и скаляры $q^{(i)}$ получаются в виде суммы производных некоторых простых выражений, содержащих элементарные функции, Бесселеву функцию $J_0\left(\rho\frac{t-t_0}{r}\right)$, ее производную и функцию $\Xi\left(\rho\frac{t-t_0}{r}\right)$, где

$$\Xi(\xi) = \int_0^\xi J_0(\xi_1)\,d\xi_1,$$

причем

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z-z_0)^2}.$$

Главные значения интегралов, входящих в формулы (6), определяются следующим образом:

$$\text{гл. зн. ц.}\iiint_\Omega \psi\,d\Omega = \lim_{\eta\to 0}\iiint_{\substack{|z-z_0|\leqslant h\\ \rho\leqslant\eta}} \psi\,d\Omega,$$

$$\text{гл. зн. д.}\iiint_\Omega \psi\,d\Omega = \lim_{h\to 0}\iiint_{\substack{|z-z_0|\leqslant h\\ \rho\leqslant r_1}} \psi\,d\Omega.$$

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Phi,$$

связанного с системой (1), решение задачи для безграничного пространства при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1$$

дается в виде

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\left\{\frac{1}{r}J_0\left(\rho\frac{t_0}{r}\right)\Delta u_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\Xi\left(\rho\frac{t_0}{r}\right)\Delta u_1\right\} d\Omega -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0}\left\{\iiint_\Omega \frac{1}{\rho}\Xi\left(\rho\frac{t_0-t}{r}\right)\Phi\,d\Omega\right\} dt,$$

при естественных условиях, налагаемых на $\Phi$, $u_0$ и $u_1$. Указанные выше решения в замкнутом виде получаются путем применения формул, аналогичных формуле Грина, для искомого решения и некоторых частных решений указанных уравнений.

*В. И. Смирнов*

**233. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. Халилов З. И.** Докл. АН Азерб. ССР, 1954, 10, № 3, 151—158 (русс.; резюме азерб.)

Рассматривается задача определения решения уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

при условиях $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ и $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(y)$. Функция $u$ ищется в виде

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t)\sin mx. \qquad (1)$$

Для определения коэффициентов $A_m(t)$ получается система

$$A_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t K_{mn}(t,\tau)A_n(\tau)\,d\tau + f_m(t), \qquad (2)$$

в которой $K_{mn}$ и $f_m$ — известные функции. При выполнении некоторых условий относительно данных задачи система (2) однозначно разрешима, и ряды $\sum_{m=1}^{\infty}|A_m|$, $\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{dA_m}{dt}\right|$ сходятся равномерно по $t \in [0,T]$. Тем самым устанавливается, что $u_N = \sum_{m=1}^{N} A_m(t)\sin mx$ и $\frac{\partial u_N}{\partial t}$ сходятся равномерно по $x$ и $t$ к некоторым функциям $u$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ соответственно. Кроме того, $L[u_N] \to 0$.

Получаемую таким предельным переходом функцию $u$ автор, следуя С. Л. Соболеву, называет обобщенным решением. Теорема II, доказываемая автором для уравнения (1) (теорема единственности классического решения), известна для общих гиперболических уравнений без каких-либо ограничений на знаки коэффициентов при младших производных (автор требует, чтобы $C(x,t) \leqslant 0$). В теореме III фактически доказано, что если имеется классическое решение, то оно совпадает с (1), а не вообще с обобщенным решением задачи, как утверждает автор. Единственность же обобщенного (в выше указанном смысле) решения автором не доказана.

Автор, повидимому, не знаком с работами, относящимися к смешанной задаче для гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими от $x_1, \ldots, x_n, t$. В них установлены более сильные теоремы существования и единственности для общих линейных гиперболических уравнений. *О. А. Ладыженская*

**234. Решение задачи Коши для нелинейных уравнений второго порядка гиперболического типа. Фурес-Брюа** (Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires. Fourès-Bruhat Yvonne), Bull. Soc math. France, 1953, **81**, № 4, 225—288 (франц.)

Решение задачи Коши для линейного гиперболического уравнения

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B^\lambda\frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + f(x) = 0$$

сводится с помощью введения характеристических координат и использования соотношений на характеристическом конноиде к решению некоторой системы интегральных уравнений. Аналогичное сведение проведено и для случая гиперболической системы вида

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0,$$

$$\lambda, \mu = 1, \ldots, n;\ s, t = 1, \ldots, N.$$

В ней коэффициенты $A^{\lambda\mu}$ во всех уравнениях одинаковы. Получаемые в обоих случаях системы интегральных уравнений типа Вольтерра допускают решения в некоторой области $D$, определяемой коэффициентами $A^{\lambda\mu}$, $B^\lambda$ и $B_s^{t\lambda}$. Далее автор рассматривает задачу Коши и для нелинейной системы вида

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + f_s = 0, \qquad (1)$$

где $A^{\lambda\mu}$ и $f_s$ зависят от $x^k$, $u_l$ и $\partial u_l / \partial x^k$. Доказывается, что при определенных условиях гладкости входящих в эту систему функций и начальных данных решение задачи Коши существует в некоторой области $D$.

Это доказательство проводится по следующему плану: коэффициенты (1) и начальные функции аппроксимируются аналитическими функциями. Теорема Коши—Ковалевской гарантирует существование аналитических решений этих вспомогательных задач в некоторой малой области $D'$, зависящей, вообще говоря, от степени приближения. Эти решения аналитически продолжаются на некоторую фиксированную область $D$ с помощью двух вспомогательных систем: системы интегро-дифференциальных уравнений и системы интегральных уравнений. Обе системы выведены из системы (1) и систем, полученных ее дифференцированием по $x^k$, с помощью введения характеристических координат подобно линейному случаю. Среди функций, входящих в решение этих систем, содержится и решение исходной системы (1). Существование решения системы интегро-дифференциальных уравнений устанавливается на основании принципа неподвижной точки. После того, как установлено существование в $D$ решений аналитических систем, с помощью предельного перехода получают и искомое решение задачи для (1).

Примечание референта. Результаты автора вытекают из работы И. Г. Петровского (Матем. сб., 1937, 2 (44), 815—870). Исследование линейного случая близко к аналогичным исследованиям С. Л. Соболева («Некоторые приложения функционального анализа к математической физике», Л., 1950). Конструирование же решения в нелинейном случае, проводимое автором, значительно проще сделано с помощью конечных разностей в работе референта (Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, 1952, № 23, 192—246) для общих квазили-

нейных систем гиперболического типа. При этом все доказательства для системы вида (1) существенно упрощаются, а число требуемых производных от данных задачи снижается (до того же порядка, который получен для одного квазилинейного уравнения С. Л. Соболевым) по сравнению с общим случаем квазилинейной системы.

*О. А. Ладыженская*

235. **О линейных дифференциальных уравнениях в частных производных, коэффициентами которых являются полиномы. Хорних** (Über lineare partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind. Hornich Hans), Arch. Math., 1953, 4, № 5—6, 437—440 (нем).

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i_1 \dots i_n} P_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x_1 \dots x_n), \quad (1)$$

коэффициентами которого являются полиномы

$$P_{i_1 \dots i_n} = \sum_{h_1 \dots h_n} P_{i_1 \dots i_n}^{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}. \quad (2)$$

Ставится вопрос, когда имеются решения уравнения (1), представимые рядом Лорана

$$u = \sum_{l_1 \dots l_n} u_{l_1 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}, \quad (3)$$

если для свободного члена $f$ имеет место разложение (3). Подстановка (2) и (3) в (1) и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях $x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$ дают бесконечную систему для определения $u_{l_1 \dots l_n}$:

$$\sum_{l_1 \dots l_n} A_{j_1 \dots j_n}^{l_1 \dots l_n} u_{l_1 \dots l_n} = f_{j_1 \dots j_n}.$$

Устанавливается, что эта система однозначно разрешима, если выполнены следующие условия:

1) $P_{0 \dots 0}^{0 \dots 0} \neq 0$,

2) все отличные от нуля коэффициенты $P_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$ таковы, что никакая их линейная комбинация с целыми положительными коэффициентами не обращается в нуль;

3) имеется такой целочисленный вектор $(k_1, \dots, k_n)$ и целое число $K$, что для всех $(j_1, \dots, j_n)$, удовлетворяющих неравенству

$$k_1 j_1 + \dots + k_n j_n < K,$$

имеет место $f_{j_1 \dots j_n} = 0$. Кроме того, для всех таких $(j_1, \dots, j_n)$ коэффициенты $u_{j_1 \dots j_n}$ полагаются равными нулю;

4) для всех отличных от нуля коэффициентов $P_{i_1 \dots i_n}^{i_1+r_1 \dots i_n+r_n}$ $((r_1 \dots r_n) \neq 0 \dots 0)$ вектора $(r_1 \dots r_n)$ удовлетворяют неравенству

$$k_1 r_1 + \dots + k_n r_n < 0.$$

Сходимость так полученного ряда (3) не исследуется. Отмечается лишь следующее:

Если при соблюдении всех пунктов 1)—4) величины $|j_1| + \dots + |j_n|$ $\sqrt{|A_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n}|}$ стремятся к нулю для какой-нибудь последовательности векторов $(j_1, \dots, j_n)$ с возрастающей суммой $j_1 k_1 + \dots + j_n k_n$, то полученный выше ряд для $u$ не может сходиться для всех свободных членов $f$, имеющих разложения вида (3).

*О. А. Ладыженская*

236. **Теория функций волнового уравнения, применительно к специальным рядам и интегралам, содержащим функции Бесселя, Уиттекера и Матье. Хенрич** (Zur Funktionentheorie der Wellengleichung. Mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Whittakerschen und Mathieuschen Funktionen. Henrici Peter), Comment. math. helv., 1953, 27, № 3, 235—272; № 4, 273—293 (нем.).

Исследуется уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2\mu + 1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + k^2 u = 0, \quad (1)$$

которое подстановкой $v(\rho, \varphi, \zeta) = \rho^\mu \dot{u}(\zeta, \rho) e^{i\mu\varphi}$ ($\mu$ — произвольное комплексное) получается из метагармонического уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0. \quad (2)$$

Основная цель работы: 1) исследовать вопросы существования и аналитического продолжения регулярных решений (1);

2) установить возможности разложения каждого регулярного решения (1) в ряд по частным решениям этого уравнения или же равномерного приближения при помощи этих решений;

3) на основе этого создать единообразный подход к разложению в ряд по этим частным решениям различных специальных функций.

В работе такие частные решения (1) получены после разделения переменных при $\zeta = r\cos\vartheta$, $\rho = r\sin\vartheta$.

Они названы функциями Бесселя — Гегенбауера и имеют следующий вид:

$$f_\mu^\nu(r, \vartheta; k) = k^{-\mu} (kr)^{-\nu} \frac{\Gamma(\mu + 1)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\mu + 2\nu)} \times \\ \times C_\mu^\nu(\cos\vartheta)\, J_{\nu+\mu}(kr) \quad (3)$$

$$\left(\nu = \mu + \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}\nu > 0 \text{ или } \nu = 0\right).$$

Приводя уравнение (1) к нормальным координатам $z = \zeta + i\rho$, $z^* = \zeta - i\rho$, автор исследует решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} - \frac{\nu}{z - z^*}\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z^*}\right] + \frac{k^2}{4} U = 0. \quad (4)$$

Функция $U(z, z^*) = u(\zeta, \rho)$ рассматривается в области $G \times G$, где $G$ — выпуклая односвязная симметрическая относительно вещественной оси область, содержащая внутри начало координат. Автор доказывает существование и единственность симметрического аналитического решения (4) в $G \times G$ при условиях следующих типов:

$$U(z, 0) = f(z), \quad (5)$$

$$U(z, z) = g(z), \quad (6)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в $G$ функции. Для условия (6) решение дано формулой, а случай (5) приводится к (6) при помощи интегрального уравнения. При $\nu = 0$ теоремы сформулированы несколько шире и в обоих случаях решения даются формулами.

Можно считать, что в $G$ задан линейный непрерывный оператор, который переводит аналитическую функцию $f(z)$ или $g(z)$ в $U(z, z^*)$.

Автор устанавливает, что такой оператор переводит

$$f(z) = \frac{\Gamma(2\nu)}{2^{m+\nu}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu+m)\,(\nu+m)}\, z^m = \alpha_m^\nu z^m \quad (7)$$

в

$$F_m^\nu(z, z^*) = F_m^\nu(z, z^*; k) = f_m^\nu(r, \vartheta; k) \quad (8)$$

Это позволяет для частного решения (4) $\varphi(z, z^*)$ (а также и частного решения (1)) найти следующее разложение в ряд по $F_m^\nu$ (или же $f_m^\nu$):

если известно либо разложение $\Phi(z, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$,

либо $\Phi(z, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m^\nu(z, z)$, то имеет место

$$\Phi(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha_m^\nu} F_m^\nu(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m^\nu(z, z^*). \quad (9)$$

В качестве $\Phi(z, z^*)$ в дальнейшем берутся решения (4), которые получаются после разделения переменных в (1) в а) декартовой, б) параболической, в) эллиптической, г) полярной системе координат. Получаются частично известные разложения следующих специальных функций в указанных случаях: а) произведения показательной и бесселевой функции; б) произведения функций Уиттекера (подробнее об этом см. РЖМат, 1953, 1239), в) произведения функций Матье, г) функции $F_\mu^\nu(z + \xi, z^* + \xi; k)$ ($k = 0, 1$; $\xi$ — произвольное комплексное).

Рассматриваются частные случаи полученных формул. Например, при $k = 1$ частными случаями разложения в г) являются известные формулы сложения и умножения бесселевых функций. Аналитическим продолжением показывается, что полученные формулы справедливы также при $\mathrm{Re}\,\nu < 0$, кроме некоторой последовательности точек на вещественной оси $\nu$. Используя формулу решения при условии (6), автор указанные специальные функции дает также в виде определенных интегралов.

Рассмотренные вопросы связаны с исследованиями И. Н. Векуа (Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1948).

*Э. Я. Риекстыньш*

**237. О локальных свойствах решений непараболических дифференциальных уравнений.** Хартман, Винтнер (On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, 449—476 (англ.)

Первая часть статьи (§§ 1—12) посвящена исследованию локальных свойств решений эллиптических систем первого порядка с двумя независимыми переменными и двумя неизвестными функциями, а также решений линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Основные результаты первой части (§§ 1—8) содержатся в статье И. Н. Векуа «Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек» (Матем. сб., 1952, **31 (73)**, № 2, 217—314). Ссылки на статью И. Н. Векуа в реферируемой работе отсутствуют.

В частности, теорема (§ 3) о поведении решения системы

$$v_x + u_y + \alpha u + \beta v = 0, \quad (1)$$
$$v_y - u_x + \gamma u + \delta v = 0$$

вблизи точки, где $U = u + iv$ обращается в нуль, и теорема (§ 4) об устранимой особой точке непосредственно следует из доказанного в упомянутой работе И. Н. Векуа представления

$$U = \varphi(z)\, e^{\psi(z)}, \quad (2)$$

где $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — голоморфная функция, $\psi(z)$ — непрерывная функция.

Теоремы (§ 1), относящиеся к уравнению

$$w_{xx} + w_{yy} + dw_x + ew_y + fw = 0, \quad (3)$$

также вытекают из формулы (2), так как уравнение (3) с помощью подстановки, указанной в статье И. Н. Векуа, приводится к системе вида (1).

При помощи обыкновенного преобразования координат теоремы о локальных свойствах решений переносятся в реферируемой статье на случай общих линейных систем первого порядка эллиптического типа и линейных уравнений второго порядка. Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с приложениями к дифференциальной геометрии.

Во второй части работы (§§ 13—15) получено следующее уточнение известной теоремы Карлемана о единственности решения задачи Коши для линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными:

Пусть $A = A(x, y)$ и $B = B(x, y)$ — квадратные функциональные матрицы порядка $n$, причем $A$ непрерывно дифференцируема, а $B$ непрерывна на замыкании области $D_R$, определяемой неравенствами $x > 0$, $x^2 + y^2 < R^2$. Пусть матрица $A$ имеет только простые элементарные делители. Если $u = u(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая в $D_R$ вектор-функция, удовлетворяющая в $D_R$ уравнению $u_x + Au_y = Bu$, причем $u(+0, y) \equiv 0$ при $|y| < R$, то существует положительное $\varepsilon$ такое, что $u = 0$ в $D_\varepsilon$. Доказательство Карлемана требует большей гладкости $A$, например, ограниченности вторых производных от элементов матрицы $A$.

Соответственно уточнена доказанная Карлеманом теорема единственности для эллиптической системы.

*Л. А. Чудов*

**238. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения.** Бицадзе

**А. В.**, Изв. АН СССР, сер. матем.; 1953, **17**, № 6, 525—538

Пусть $D$ — трехмерная область, ограниченная поверхностью Ляпунова $S$, а

$$\mathbf{q}(x, y, z) = q_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + q_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + q_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

— вектор, заданный в $D + S$. Расстояние между точками $(\xi, \eta, \zeta)$ и $(x, y, z)$ обозначим через $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$.

Строится элементарная мажорантная функция $M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$, имеющая особенность при $\rho = 0$ и обладающая тем свойством, что для любого вектора $\mathbf{q}(x, y, z)$, непрерывного в $D + S$ вместе с производными первого порядка, справедливы равенства

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\,\mathbf{q}\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_D \left(\operatorname{div}\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{\rho} + \operatorname{rot}\mathbf{q}\times\operatorname{grad}\frac{1}{\rho}\right)d\tau =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}(x, y, z), & (x, y, z) \in D, \\ 0, & (x, y, z) \in D', \end{cases} \qquad (1)$$

причем $D'$ — область, внешняя относительно $S$. Формула (1) является обобщением на пространственный случай формулы Помпею для функции одного комплексного переменного (Pompeiu D., Rend. Circolo mat. Palermo, 1913, **35**, 277—281). В частности, если $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{q} = 0$, получаем формулу

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\,\mathbf{q}\,d\omega =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}(x, y, z), & (x, y, z) \in D \\ 0, & (x, y, z) \in D', \end{cases}$$

дающую значения потенциального вектора внутри области через его значения на $S$.

Далее доказывается, что векторы вида

$$\mathbf{Q}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\,\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega,$$

где $S$ — некоторая замкнутая или разомкнутая поверхность Ляпунова, удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\mathbf{Q} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0; \quad \text{вне } S,$$

вообще говоря, $\operatorname{rot}\mathbf{Q} \neq 0$.

Когда точка $(x, y, z)$ лежит на поверхности $S$, определяется главное значение интеграла (2) по Коши и доказывается, что особый интеграл в этом смысле всегда существует, если $\mathbf{q}(x, y, z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и что предельные значения его, когда точка $(x, y, z)$ стремится с одной и другой стороны от $S$ к точке $(x_0, y_0, z_0) \in S$, существуют и имеют место формулы, вполне аналогичные формулам Сохоцкого для обычного интеграла типа Коши.

Выводятся формулы перестановки и обращения (в случае замкнутых поверхностей) особых интегралов. В частности, устанавливаются формулы обращения

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{p(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2}} = f(x_0, y_0),$$

$$p(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\Delta f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2}},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

когда $S$ — плоскость $z = 0$. Выводится формула обращения интегрального уравнения первого рода:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \left\{\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\xi x + \eta y) + (\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)}}\right\} p(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= f(x, y),$$

где $S$ — круг $x^2 + y^2 = 1$, а $f$ — заданная на $S$ дважды непрерывно дифференцируемая функция.

В качестве иллюстрации предложенного аппарата пространственных интегралов типа Коши даны выводы формул Пуассона для сферы и полупространства, а также решение более сложной задачи Дирахле для пространства, разрезанного по круговому диску. Дана также формула обращения интегрального уравнения, встречающегося в контактных задачах пространственной теории упругости и в теории крыла (например, Галин Л. А., Прикл. матем. и механика, 1946, **10**, № 4, 424—448):

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{p(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} = q(x, y) + C,$$

где $S$ — диск $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $C$ — произвольная постоянная. *А. И. Каландия*

**239. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения. Бицадзе А. В.**, Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 389—392

Работа представляет собой продолжение исследований автора по двумерным интегралам типа Коши и их применениям в задачах математической физики (см. реф. 238).

Пусть $D$ — трехмерная область, ограниченная поверхностью Ляпунова $S$. Строится матрица $M(Q, P)$, зависящая от двух точек пространства $Q(\xi, \eta, \zeta)$, $P(x, y, z)$, $M(Q, P) = \| M_{ik}(Q, P) \|$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$ и обладающая тем свойством, что для любого достаточно гладкого вектора $\mathbf{p}(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, заданного в области $D$ и удовлетворяющего там системе уравнений

$$\begin{aligned} &p_{2x} + p_{3y} + p_{4z} = 0, \quad p_{1x} - p_{3z} + 3_{4y} = 0, \\ &p_{1y} + p_{2z} - p_{4x} = 0, \quad p_{1z} - p_{2y} + p_{3z} = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

справедливы равенства (интегральная формула Коши)

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(Q, P)\,\mathbf{p}(Q)\,d\omega_Q = \begin{cases} \mathbf{p}(P), & P \in D \\ 0, & P \in D', \end{cases}$$

причем $D'$ — область, внешняя относительно $S$.

Утверждается, что если вектор $\mathbf{p}$ задан лишь на поверхности $S$, то компоненты вектора

$$\mathbf{q}(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(Q, P)\,\mathbf{p}(Q)\,d\omega_Q, \qquad (2)$$

названного автором интегралом типа Коши, удовлетворяет в области $D$ или $D'$ системе (1).

Если точка $P = P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности $S$, то для класса векторов $\mathbf{p}$, удовлетворяющих условию Гельдера, определяется особый интеграл в правой части (2) в смысле Коши и устанавливается формула для предельных значений выражения (2), аналогичная известным формулам Сохоцкого. Устанавливается также формула перестановки порядка интегрирования для особых интегралов.

В работе указывается на возможность применения построенных автором двумерных интегралов типа Коши к теории особых интегральных уравнений и к задачам теории функций, в частности к задаче линейного сопряжения (Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М. — Л., 1949).

В качестве приложения дается решение в замкнутом виде задачи Дирихле для области $D$, представляющей собой пространство, разрезанное по круговому диску $S: x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Задача заключается в определении гармонической в области $D$ и исчезающей на бесконечности функции $u(x, y, z)$ по граничным условиям

$$u(x, y, +0) = f^+(x, y),\ u(x, y, -0) = f^-(x, y) \text{ на } S,$$

где $f^+$ и $f^-$ — заданные на $S$ функции, непрерывные в смысле Гельдера. Наконец, приводится формула обращения для интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{1/2} p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = q(x, y) + c,$$

причем $S$ представляет собой диск $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $c$ — произвольная постоянная.

В реферируемой статье, как это было замечено самим автором вслед за ее опубликованием, имеются в формулах (3), (9), (10) и (15) опечатки и некоторые (легко исправимые) неточности. По этому поводу см. Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 6, 980.

*А. И. Каландия*

**240. Дифференцируемость решений некоторых задач теории потенциала.** Кошелев А. И., Матем. сб. 1953, **32** (74), № 3, 653—664

Пусть $\Omega$ — круг или прямоугольник плоскости $x_1, x_2$ и $\Gamma$ — ее граница. Доказываются теоремы:

а) Если $f(x_1, x_2) \in L_p(\Omega)$ $(p > 1)$, то решение задачи $\Delta u = f$, $u|_\Gamma = 0$ имеет в $\Omega$ обобщенные производные второго порядка, причем

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_p} \leqslant C \| f \|_{L_p} \quad (i, j = 1, 2);$$

б) Если $\varphi(s)$ определена на $\Gamma$ ($s$ — длина дуги на $\Gamma$), причем $\varphi''(s) \in L_p(\Gamma)$ (в случае прямоугольника $\varphi'' \in L_p$ на каждой стороне и $\varphi(s)$ непрерывна на $\Gamma$), то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_p(\Omega) \quad (i, j = 1, 2),$$

где $u(x_1, x_2)$ есть решение задачи Дирихле: $\Delta u = 0$, $u|_\Gamma = \varphi(s)$

Эти теоремы переносятся на области, получаемые из круга конформным отображением посредством функции, дважды непрерывно дифференцируемой в замкнутом круге.

Для $p = 2$ и областей с достаточно гладкой границей теорема а) была ранее доказана С. Г. Михлиным (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 3, 443—446).

*Х. Л. Смолицкий*

**241. Теория дискретного потенциала.** Даффин (Duffin R. J.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 233—251 (англ.)

Для функций $u(a, b, c)$ $(a, b, c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, заданных на целочисленной решетке, определяется разностный лапласиан $Du$ (разность между суммой шести значений $u$ в соседних с $(a, b, c)$ точках и $6u(a, b, c)$). Уравнение

$$Du = -w \tag{1}$$

названо уравнением Пуассона (Лапласа, если $w \equiv 0$). Доказывается, что при $\Sigma |w| < \infty$ существует единственное решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \to \infty$. Это решение называется функцией Грина, если $w(0, 0, 0) = 1$ и $w(a, b, c) = 0$ для $k \neq 0$. Для функции Грина $g(a, b, c)$ дается представление

$$g(a, b, c) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(ax+by+cz)}\, dx\, dy\, dz}{4\left[\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{z}{2}\right]}. \tag{2}$$

Из (2) и теоремы, обобщающей на трехмерный интеграл Фурье асимптотические оценки для одномерного интеграла Фурье (Титчмарш Е., Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948, теоремы 126 и 127), получается асимптотика для $g(a, b, c)$. В частности, $g(a, b, c) = 1/4\pi k + O(1/k^3)$. Пусть $E$ — множество точек $p$ решетки, лежащих внутри или на границе шара радиуса $R$ с центром в точке $p_0$ решетки. Внутренней границей $B$ называется совокупность тех точек $p \in E$, соседние к которым лежат вне шара. Совокупность $B'$ этих соседних точек называется внешней границей множества E. Пусть $u(p)$ — гармоническая функция на $E$ (т. е. $Du = 0$, $p \in E$). Доказываются теоремы:

1) $u(p_0) = \Sigma_q C_q u(q)$ $(q \in B')$, где коэффициенты $C_q$ не зависят от $u(p)$ и удовлетворяют неравенству $A_1 \leqslant R^2 C_q < A_2$.

2) Если $u(q) \geqslant 0$ $(q \in B')$, то

$$\left| u(p_0) - \frac{3}{4\pi R^2} \sum_{p \in E} u(p) \right| < \frac{A_3 u(p_0)}{R}.$$

3) Если $u(p) \geqslant 0$ $(p \in E)$ и $p_1$ — соседняя точка с $p_0$, то

$$|u(p_1) - u(p_0)| \leqslant \frac{A_4 u(p_0)}{R}.$$

Постоянные $A_1, A_2, A_3, A_4$ — абсолютные. Эти теоремы являются аналогами теорем Гаусса и Харнака для обычных гармонических функций.

В статье имеется добавление, в котором рассмотрено асимптотическое поведение трехмерного преобразования Фурье функций, имеющих особенности типа $r^q x^\alpha y^\beta z^\gamma$. Результаты добавления использованы для получения асимптотики $g(a, b, c)$.

*Х. Л. Смолицкий*

**242. Заметка о доказательстве единственности решения для краевой задачи теории потенциала и стационарного распределения тепла. Рейнер** (A note on uniqueness proofs for boundaryvalue problems in potential theory and steady heat conduction. Rayner M. E.), Quart. J. Mech., and Appl. Math., 1953, 6, ч. 4, 385—390 (англ.)

Предлагается вариант доказательства единственности решения двумерных краевых задач теории потенциала для неограниченных областей при наличии логарифмических особенностей Пусть рассматриваемая область $G_1$ ограничена регулярной кривой Γ, уходящей в бесконечность в двух направлениях, и пусть $v'$ и $v''$ — два решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие на Γ одинаковым граничным условиям первого или второго рода и представимые при больших $r$ в форме

$$v' = A' \log r + f'(\theta) + g'(r, \theta),$$
$$v'' = A'' \log r + f''(\theta) + g''(r, \theta),$$

где $g'(r, \theta)$ и $g''(r, \theta)$ — функции, регулярные на бесконечности.

Для первой краевой задачи имеет место

$$v' = v'' \text{ на } \Gamma.$$

Поэтому при $r \to \infty$ на Γ получается

$$(A' - A'') \log r + [f'(\theta) - f''(\theta)] = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда $A' = A''$ и решения $v'$ и $v''$ могут различаться только на постоянную, но она равна нулю в силу граничных условий.

Применяя формулу Грина, автор доказывает единственность решения и для второй краевой задачи. Рассматривается также единственность решения для стационарной задачи о теплопроводности в случае, когда вся плоскость состоит из двух областей с различными коэффициентами теплопроводности. *С. Г. Зайцев*

**243. О некоторых особенностях полного интеграла уравнения в частных производных первого порядка. Никитин А. К.**, Уч. зап. Ростовск. на-Дону ун-та, 1953 18, № 3, 21—41

Исследуются особенности, которые могут быть получены при помощи полного интеграла

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 0 \qquad (1)$$

некоторого дифференциального уравнения в частных производных первого порядка; относительно функции $f$ предполагается, что она по отношению к аргументам $x_i$ является голоморфной, а по отношению к аргументам $a_j$ — алгебраической.

Результат исключения параметров $a_j$, из уравнений (1) и

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (2)$$

приводит к равенству

$$\Delta = 0, \qquad (3)$$

левая часть которого в общем случае состоит из нескольких множителей.

Если один из этих множителей $F$ обращается в нуль, причем частные производные

$$\frac{\partial f(x_i; a_j)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

для этого случая не все равны нулю, тогда равенство

$$F(x_j) = 0 \qquad (5)$$

дает особый интеграл.

Показывается, что дискриминант $\Delta$ может содержать не только особый интеграл, но и геометрические места особых точек, получаемые исключением параметров $a_j$ из системы уравнений

$$f(x_i; a_j) = 0, \frac{\partial f(x_i; a_j)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x_i; a_j)}{\partial x_k} = 0, \qquad (6)$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

так как следствием уравнений (6) является система (2).

На исследуемый случай автор обобщает результаты, известные относительно особого интеграла в трехмерном случае ($F$ входит в дискриминант $\Delta$ в некоторой степени, см. теоремы 1—3 работы). Дается подробная классификация особых точек на поверхности $f(x_i; a_j) = 0$.

Для геометрических мест особых точек доказываются предложения, аналогичные установленным для особого интеграла.

В заключение рассматриваются особые случаи, когда параметры $a_j$ входят в полный интеграл во второй степени; причем и здесь разобраны и случай особого интеграла, и случай геометрических мест различных особых точек. *В. А. Яблоков*

**244. Краевые задачи для некоторых систем линейных уравнений в частных производных. Чиммино** (Problemi di valori al contorno per alcuni sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali. Cimmino Gianfranco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 61—65 (итал.)

Приводится несколько простых примеров систем линейных уравнений в частных производных первого порядка, на которых показывается, что входящие в систему заданные функции, а также значения искомых функций на контуре области, в которой ищутся решения, не могут быть произвольно заданы, но должны удовлетворять дополнительным соотношениям.

В статье содержатся ссылки на ранее опубликованные работы автора (Riv. mat Univ. Parma, 1950. 1, 105—116; Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1942, 12, 89—113). *В. Я. Яблоков*

**245. Субфункции от многих переменных. Бекенбах, Джексон** (Subfunctions of several variables. Beckenbach E. F., Jackson L. K.), Pacif. J. Math. 1953, 3, № 2, 291—313 (англ.)

Пусть $D$ — произвольная плоская область. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество замкнутых подобластей области $D$ и пусть $\{F(x, y)\}$ — некоторое семейство непрерывных функций; замкнутые области определения которых образуют множество $\{\overline{\Gamma}\}$, удовлетворяющее условиям: а) $\{\Gamma\} \subset \mathfrak{M}$; б) всякий круг $\overline{K} \in \{\Gamma\}$, если его радиус $r \leqslant \rho$ и $\overline{K} \subset D$, где $\rho$ — произвольно фиксированное число. В предположении, что для $\{F(x, y)\}$ сохраняются определенные свой-

ства семейства гармонических функций, для произвольной конечной области $\Omega$ с границей $\omega$ ($\overline{\Omega} \subset D$) и произвольно заданной ограниченной граничной функции $h(\alpha)$ ($\alpha \in \omega$) в терминах $\{F(x, y)\}$ формулируется обобщенная граничная задача Дирихле по Винеру (Келдыш М. В., Успехи матем. наук, 1941, № 8, 171—231). Далее, вводя понятия суб- и суперфункции относительно — $\{F(x, y)\}$ (по аналогии суб- и супергармонической функции), методом Перрона (Perron O., Math. Z., 1923, 18, 42—54; Петровский И. Г., Успехи матем. наук, 1941, № 8) авторы доказывают следующую основную теорему:

Если граница $\omega$ области $\Omega$ регулярна, то для всякой непрерывной граничной функции $h(\alpha)$ ($\alpha \in \omega$) рассматриваемая задача Дирихле в данной области $\Omega$ имеет единственное решение. При этом регулярность граничной точки определяется также в терминах — $\{F(x, y)\}$ (по аналогии с известным определением с помощью функций барьера).

Даются достаточные критерии регулярности граничной точки, обобщающие классические. Применения к дифференциальным уравнениям эллиптического типа авторы намерены публиковать отдельно.

*М. Б. Гавуа*

**246. Система нелинейных дифференциальных уравнений, возникающая при передаче тепла. Кац, Пейсер** (A system of non-linear partial diferential equations arising in heat transfer. Katz S., Peiser A. M.), J. Math. and Phys., 1954, 32, № 4, 256—268 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$f(u)\frac{\partial u}{\partial x} = u - v = g(v)\frac{\partial v}{\partial y}, \quad x > 0, \ y > 0, \qquad (1)$$

при предельных условиях

$$u(+0, y) = \varphi(y), \ v(x, +0) = \psi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны при $t > 0$; $f(t)$, $g(t)$ непрерывны и удовлетворяют условию $|f(t)| \geqslant \alpha > 0$, $|g(t)| \geqslant \alpha > 0$ при $-\infty < t < +\infty$. Преобразовав (1), (2) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\int_{\varphi(y)}^{u(x,y)} f(s)\,ds = \int_0^x [u(\xi, y) - v(\xi, y)]\,d\xi,$$

$$x \geqslant 0, \ y \geqslant 0,$$

$$\int_{\psi(x)}^{v(x,y)} g(s)\,ds = \int_0^y [u(x, \eta) - v(x, \eta)]\,d\eta,$$

авторы методом последовательных приближений доказывают существование и единственность непрерывного решения $u$, $v$ задачи (1), (2) с непрерывными $u_x$, $v_y$. К этому решению при $h \to 0$, $k \to 0$ сходится также и решение $U_{m,n}$, $V_{m,n}$ соответствующей системы разностных уравнений

$$f(U_{m,n})(U_{m+1,n} - U_{m,n})/h = U_{m,n} - V_{m,n} =$$

$$= g(V_{m,n})(V_{m,n+1} - V_{m,n})/k,$$

$$U_{0,n} = \varphi(nk), \ V_{m,0} = \psi(mh), \ m = [x/h], \ n = [y/k].$$

В простейшем (линейном) случае $f(t) \equiv -g(t) \equiv 1$, $\psi(x) \equiv 0$, $\varphi(y) \equiv 1$ дается оценка быстроты сходимости разностного решения к точному.

*М. К. Фаге*

**247. Об одной задаче теории теплопроводности и ее решение посредством преобразования Ганкеля. Делаво** (Sur un problème de la theorie de la chaleur, et sa solution au moyen des transformations de Hankel. Delavault Huguette), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 26, 2484—2486 (франц.)

Решается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

при заданных значениях $f(0, r, z)$, $f(t, r, 0)$, $f(t, r, l)$ посредством преобразования

$$\varphi(u, v, z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ut} r J_n(vr) f(t, r, z)\,dr\,dt \qquad (1)$$

при $n = 0$.

Для функции $\varphi$ получается краевая задача:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (u + v^2)\varphi = -\int_0^\infty r J_0(vr) f(0, r, z)\,dr;$$

$\varphi(u, v, 0)$, $\varphi(u, v, l)$ — образы заданных функций $f(t, r, 0)$, $f(t, r, l)$, соответственно.

Решение этой краевой задачи получается обычным способом. Для определения оригинала $f$ найденной функции $\varphi$ применяются определенные формулы обращения относительно переменных $u$ и $v$.

Рассматриваются также некоторые свойства преобразования (1).

*З. И. Халилов*

**248. Решение сингулярной задачи Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Диас, Вейнбергер** (A solution of the singular initial value problem for the Euler — Poisson — Darboux equation. Diaz J. B., Weinberger H. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 703—715 (англ.)

Для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона

$$\Delta u = u_{tt} + \frac{k}{t}u_t \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}, \ t > 0\right) \qquad (1)$$

($k$ — любое вещественное или комплексное число) исследуется задача Коши с начальными данными, заданными на гиперплоскости $t = 0$:

$$u(x_1, \ldots, x_m, 0) = f(x_1, \ldots, x_m), \qquad (2)$$

$$u_t(x_1, \ldots, x_m, 0) = 0.$$

В случае $k = m - 1$, как известно (Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.— Л., 1945, 466), решение задачи (1), (2) может быть представлено как среднее значение функции $f(x_i)$ на поверхности $m$-мерной сферы, описанной из точки $(x_1, \ldots, x_m)$ радиусом, равным $t$.

Найденное таким путем выражение с помощью метода спуска Адамара приводит к решению задачи для целых значений $k = m + n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), которое, как показано в работе, остается справедливым при любых комплексных числах $k$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}(k) > m - 1$.

Аналитическое продолжение полученных формул по параметру $k$ дает возможность авторам построить

в замкнутой форме решение задачи и для области $\mathrm{Re}\,(k) \leqslant m-1$.

Исследуя функцию $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ для случая нечетных отрицательных чисел $k = -(2r+1)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, найденную путем предельного перехода в формулах, соответствующих значениям $k \leqslant m-1$, авторы показывают, что при $\Delta^{r+1} f \neq 0$ $(\Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1}), \Delta^0 = 1)$ производная $\partial^{1-k} u / \partial t^{1-k}$ имеет логарифмическую особенность на гиперплоскости $t = 0$.

Эта особенность исчезает, если начальная функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ является полигармонической функцией порядка $(1-k)/2$ (условие $\Delta^{r+1} f = 0$, как отмечают авторы, обнаружено ранее в работе Вейнштейна ((Weinstein A., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 2584—2585)).

В работе исследуется также принцип Гюйгенса для уравнения (1). *М. Б. Капилевич*

**249. Некоторая система функций и уравнения колебаний. Дюнген** (Integralvarianten (variants intégraux) und Schwingungsgleichung (Referat eines Vortrages auf der Jahrestagung der Gamm in Aachen). Dungen F. H. van den), Phys. Verhandl., 1953, **4**, № 3, 38—39 (нем.)

Указывается, что при решении задачи Коши для дифференциального уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

может быть введена система функций

$$V_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x, t)\, dx,$$

связанная с интегральным преобразованием Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ipx)\, u(x, t)\, dx$$

для искомого решения при помощи соотношения

$$F(t) = \sum \frac{(ip)^n}{n!} V_n(t).$$

Функции $V_n(t)$ характеризуют искомое решение и могут служить для контроля численных расчетов и построения приближенных решений.

Подобная система функций может быть определена и в других случаях, например при использовании преобразования Лапласа. *Л. П. Смирнов*

**250. Об одной проблеме теории тепла и ее решение способом преобразований Фурье и Лапласа. Делаво** (Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace. Delavault Huguette), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 18, 1067—1068 (франц.)

Автор ищет решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (1)$$

в области $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < l$, $t > 0$, принимающее начальные и граничные значения: $f(0, x, y, z)$, $f(t, x, y\, 0)$ и $f(t, x, y, l)$, предполагая, что $f(t, x, y, z) \to 0$ при $x, y$, стремящихся к нулю, $\frac{\partial f}{\partial x} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ для $|x| \to \infty$, $\frac{\partial f}{\partial y} = O\left(\frac{1}{y}\right)$ для $|y| \to \infty$.

Решение ищется операционным методом.

Применяя преобразование Фурье относительно переменных $x$ и $y$, а относительно $t$ — преобразования Лапласа, автор получает дифференциальное уравнение относительно $z$:

$$\frac{\partial^2 \varphi(u, v, w, z)}{\partial z^2} - (u + v^2 + w^2)\, \varphi(u, v, w, z) = -F(0, v, w, z), \qquad (2)$$

где $\varphi(u, v, w, z)$ — изображение искомой функции $f(t, x, y, z)$; $F(0, v, w, z)$ — изображение известной функции $f(0, x, y, z)$. Уравнение (2) автор решает с граничными условиями:

$$\varphi(u, v, w, 0) = a(u, v, w),\ \varphi(u, v, w, l) = b(u, v, w),$$

где $a(u, v, w)$ и $b(u, v, w)$ — изображения известных функций $f(t, x, y, 0)$ и $f(t, x, y, l)$.

Затем, применяя последовательно формулы обращения Лапласа и Фурье, автор получает решение в явном виде с помощью теоремы свертки. Полученный результат является более общим, чем результаты, полученные им ранее (C. r. Acad. sci., 1953, **236**, 2484). *Е. И. Ким*

**251 К. Ортогональные функции в краевых задачах математической физики. Фогель** (Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique. Vogel Théodore, 196 pp., Editions du Centre national de la recherche scientifique, Paris, 1953, 1200 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 16, Part 1, 368 (библ.)

**252 Д. О решении некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа. Карманов В. Г.** Автореф. дисс. канд физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

**253. О влиянии высших гармоник при детектировании. Хаген** (Über den Wirkungsgrad bei Frequenzvervielfachung in Detektorschaltung. Hagen G. B.), Nachrichtentechnik, 1953, **3**, № 11, 482—486 (нем.)

В качестве характеристики детектора вместо экспоненты предлагается брать гиперболу

$$y^2 + Ay + Bxy + Cx^2 + Dx + E = 0, \qquad (1)$$

ибо она лучше соответствует экспериментальной кривой. Для изучения влияния высших гармоник при наложенном на детектор напряжении $x_0 \cos \omega t$, в выражение для $y$, определенное из (1), подставляется $x = x_0 \cos \omega t$ и входящее в это выражение

$$z(\varphi) = \sqrt{\alpha \cos^2 \varphi + \beta \cos \varphi + \gamma} \qquad (\varphi = \omega t)$$

разлагается в ряд по косинусам.

Именно, сначала разлагается $\frac{d}{d\varphi}\ln z(\varphi)$, полученное выражение затем почленно интегрируется, потенцируется и представляется в виде произведения двух рядов, один из которых дается приближенно. Наконец, эти ряды перемножаются.

В конце статьи делаются выводы, имеющие значение для радиотехники. *Э. Я. Риекстыньш*

**254. Об особенном случае, существующем в проблеме устойчивости в нелинейной механике. Коломбо** (Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non-lineare. Colombo Giuseppe), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, 123—133 (итал.)

Рассматривается обобщенное уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\ddot{v} + \alpha(v^2 - 1)\dot{v} + \omega^2 v = E\sin 3\omega t, \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$, $E = -2\alpha\omega$.

Уравнение (1) преобразовывается к виду

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = -2k\sin 3t,\ k = \frac{\alpha}{\omega}. \qquad (2)$$

Для изучения устойчивости решения $x = 2\cos t$ уравнения (2) составляется уравнение в вариациях

$$\delta\ddot{x} + k(1 + 2\cos 2t)\delta\dot{x} + (1 - 4k\sin 2t)\delta x = 0,$$

которое заменой

$$\delta x = \eta \exp[-k/2(t + \sin 2t)]$$

приводится к уравнению типа Хилла

$$\ddot{\eta} + \left\{1 - 2k\sin 2t - \frac{k^2}{4}(1 + 2\cos 2t)^2\right\}\eta = 0. \qquad (3)$$

Для уравнения (3) разыскиваются обычным образом периодические решения с точностью до величин шестого порядка относительно малого параметра $k$.

В результате дискутируется вопрос о необходимой степени точности построения решения уравнения Ван-дер-Поля для определения вопроса об устойчивости. *Ю. А. Митропольский*

**255. Преобразование временной характеристики в частотную для линейной сервосистемы. І. Ладбрук** (Step to frequency response transforms for linear servo systems. I. Ludbrook L. C.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 311, 27—30 (англ.)

Рассматривается динамическая система, описываемая линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и с заданной функцией $f(t)$ в правой части. Предполагается, что уравнение неизвестно, но что задан графиком интеграл этого уравнения для случая, когда $f(t)$ — единичная функция Хевисайда. Требуется найти частное решение этого же уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям, для случая, когда $f(t) = A\sin\omega t$. Описывается элементарное решение этой задачи, основывающееся на приближенной замене заданного графика ломаной линией с использованием затем основных соотношений теории преобразований Фурье. Указывается, что во второй части работы будут выяснены пределы применимости метода, а в третьей части — дана проверка метода на практическом примере. *М. А. Айзерман*

**256. Возмущение фильтрующих колебательных контуров. II. Каэн** (Perturbation des oscillateurs filtrés. II. Cahen Gilbert), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 4, 356—358 (франц.)

В первой части работы (C. r. Acad. sci, 1952, **235**, 1614) изучались периодические решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при наличии в правой части гармонического возмущения вида $f(t) = A\sin\omega t$. С помощью построения, являющегося модификацией известного построения Льенара, автор определил порог области «захватывания колебаний частотой внешней силы». В реферируемой второй части работы та же задача формулируется при предположении, что внешнее возмущение имеет вид $f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$, где $\theta$ — заданная функция времени. Метод автора в этом случае сводит задачу к нелинейному уравнению третьего порядка, и построение Льенара не может быть непосредственно применено. Указывая на это обстоятельство и не решая поставленной задачи, автор отмечает, что результаты, касающиеся устойчивости невозмущенного режима и существования порога захватывания, целиком переносятся и на этот более сложный случай. Доказательств этих утверждений заметка не содержит. *М. А. Айзерман*

**257. О работах И. И. Гальперина, посвященных условиям структурной устойчивости динамических систем. Неймарк Ю. И.,** Автоматика и телемеханика 1953, **14**, № 1, 88—92

Статья представляет дискуссионное выступление автора и содержит критику ошибок, допущенных И. И. Гальпериным в работах по теории структурной устойчивости систем автоматического регулирования. *Г. М. Уланов*

**258. Частотный метод анализа систем прерывистого регулирования. Цыпкин Я. З.,** Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 1, 11—32

Излагается частотный метод анализа систем прерывистого регулирования, аналогичный хорошо известному частотному методу анализа систем непрерывного регулирования. Исследуется связь, существующая между первой разностью дискретной временной характеристики $u$ и вещественной частью частотной характеристики замкнутой системы автоматического регулирования, дающей возможность произвести построение процесса регулирования, оценить ее качество и, в частности, найти интегральную квадратичную ошибку системы

$$I_2^n = \sum_{n=0}^{\infty} u^2[n].$$

С этой целью рассмотрен детально графический способ построения частотной характеристики разомкнутой системы прерывистого регулирования $W^*(jx)$ по частотной характеристике линейной части системы $W(i\omega)$, которая может быть найдена обычным путем по уравнениям линейной части системы или по экспериментальным данным, и в последующем—способ построения вещественной и мнимой части частотной характеристики замкнутой системы. Показывается эффективность стабилизации систем

прерывистого регулирования объектов с запаздыванием, с распределенными постоянными.

Расчет систем прерывистого регулирования, описываемых разностными дифференциальными уравнениями, осуществляется операционным методом, основанным на дискретном преобразовании Лапласа. Метод исследования применим к широкому классу систем с импульсными элементами. *Г. М. Уланов*

259. **Об одной лжетеореме и о формализме в теории автоматического регулирования. Рубин Б. И.**, Автоматика и телемеханика. 1953, 14, № 1, 93—95

Критическая заметка на статью М. А. Айзермана (Автоматика и телемеханика, 1948, 9, № 2, 104—122). Автор заметки считает, что теорема о структурной устойчивости, доказанная Айзерманом, не может иметь практического смысла, так как она связана с сильным ограничением. Это ограничение сводится к тому, что предметом рассмотрения являлись одноконтурные системы автоматического регулирования, которым соответствует характеристическое уравнение вида

$$\prod_{i=1}^{n} d_i(p) + K = 0, \qquad (1)$$

где $d_i(p)$—многочлены не выше второй степени, а $K$ — постоянная.

Попытка автора заметки показать несостоятельность теоремы на примерах основана на недоразумении, так как все примеры относятся к неодноконтурным системам, которым соответствует характеристическое уравнение, отличающееся от (1) тем, что вместо $K$ в нем стоит многочлен по $p$, и к которым упомянутая теорема не имеет никакого отношения. *Я. З. Цыпкин*

260. **Синтез передаточной функции с полюсами, лежащими на отрицательной действительной полуоси. Уэйнберг** (Synthesis of transfer functions with poles restricted to the negative real axis. Weinberg Louis), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 2, 207—216 (англ.)

Задана дробно-рациональная функция $K = \frac{p(s)}{q(s)}$. Все корни знаменателя—отрицательные действительные числа. Требуется указать электрическую цепь, состоящую только из пассивных сопротивлений и емкостей, такую, чтобы функция $K$ была передаточной функцией этой цепи. Линейное дифференциальное уравнение такой цепи, составленное в силу закона Кирхгофа, при предположении, что ток в цепи вызван приложенным извне напряжением вида импульсной функции Дирака, должно удовлетворять при этом следующему условию: преобразование Лапласа для заряда на одной из емкостей совпадает с $K$

Сформулированная задача решалась рядом авторов при дополнительном предположении, что нули $p(s)$ расположены слева от мнимой оси (минимально-фазовые системы). В реферируемой заметке задача решается при более общем предположении: $p(s)$ не имеет положительных действительных корней. В основу метода решения задачи положен прием присоединения параллельных ветвей и смещения нулей, предложенный Гийменом (Guillemin E. A., J. Math. and Phys., 1949, **28**, 22—42) и в реферируемой заметке не описываемый, а также разработанный автором прием приведения передаточной функции неминимально-фазовой системы, не имеющей действительных положительных нулей, к передаточной функции системы минимально-фазового типа. *М. А. Айзерман*

261. **Соответствие между устойчивостью разомкнутой системы и частотными характеристиками линейных систем. Доммаш** (The relation between open-loor stability and frequency response diagrams for linear systems. Dommasch Daniel O.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 7, 506—509 (англ.).

Автор предлагает судить об устойчивости системы автоматического регулирования, описываемой линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, по протеканию годографа $1/f(i\omega)$ $(0 \leqslant \omega < \infty)$, где $f(\lambda) = 0$ —характеристическое уравнение рассматриваемой системы. Получаемые автором условия, которым должен удовлетворять годограф $1/f(i\omega)$, для того чтобы полином $f(\lambda)$ был гурвицевым, непосредственно вытекают из принципа аргумента Коши.

Автор, вероятно, не знает, что прием этот в теории регулирования используется с 1938 г. (Михайлов А. В., Автоматика и телемеханика, 1938, № 3, 27—81), и что вместо годографа $1/f(i\omega)$ используется обычно годограф $f(i\omega)$. Построение последнего годографа по точкам более просто, так как для него $\mathrm{Re}\, f(i\omega)$ и $\mathrm{Im}\, f(i\omega)$ — обыкновенные полиномы (а не дробно-рациональные функции) по $\omega$. *М. А. Айзерман*

262. **Анализ нелинейных сервомеханизмов дельта-методом фазовой плоскости. Бьюленд** (Analysis of nonlinear servos by phaseplane-delta method. Buland Robert N.), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 1, 37—48 (англ.)

Имея в виду некоторые задачи теории сервосистем, автор, исходя из известного построения Льенара, разрабатывает метод графического построения фазовой траектории нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с правой частью. Уравнение сводится к виду $\ddot{x} + \omega^2(x + \delta) = 0$, где $\delta$ — функция $x$ и $t$, и далее при построении траектории методом Льенара значение $\delta$ считается неизменным на малых интервалах времени. Метод иллюстрируется несколькими простыми примерами. Указывается на возможность использовать предложенное построение для конструирования счетно-решающего механизма, предназначенного для решения нелинейных уравнений. *М. А. Айзерман*

263. **Об одном случае ограниченной задачи трех тел, более общем, чем случай Хилла. Агостинелли** (Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi piú generale di quello di Hill. Agostinelli Cataldo), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 4, 377—384 (итал.)

Рассматривается частный случай ограниченной проблемы трех тел, близкий к задаче Хилла, отличающийся от последней тем, что в разложении пертурбационной функции по степеням отношения $r/R$ удерживается не один, а два первых члена. Уравнения движения в этом случае автор приводит к виду

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

где

$$\Omega(x, y) = \frac{fm_0}{r} + \frac{1}{2}(n^2 - n_1^2)(x^2 + y^2) + \frac{3}{2} n_1^2 x^2 + \frac{n_1^2}{R}\left(x^3 - \frac{3}{2} xy^2\right),$$

$x, y$ - координаты тела нулевой массы в подвижной системе координат, $n$ и $n_1$ определяются из соотношений

$$n^2 = f(m_0 + m_1)/R^3, \quad fm_1 = n_1^2 R^3,$$

$m_0$, $m_1$ — массы конечных тел, $R$ — их взаимное расстояние, $r$ — расстояние тела нулевой массы от одного из конечных тел.

Доказывается существование периодических решений, аналогичных вариационной кривой в задаче Хилла, в том числе решения «максимальной лунации», имеющего точку возврата с касательной, параллельной оси $y$. Начальные данные этого решения $x_0$, $y_0$, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ удовлетворяют условиям:

$$x_0 = y_0 = 0,$$

$$\Omega(x_0, y_0) = C_0, \quad \frac{\partial \Omega(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0.$$

Изучается окрестность этого периодического решения, и, при помощи разложения координат в ряд по степеням $t$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ при условии $y_0 = 0$, доказывается существование периодических решений, пересекающих в трех точках прямую $x = x_0$ (при $y > 0$) и симметричных относительно оси $x$. *Г. А. Мерман*

264. **Замечание к работе «Об асимптотических решениях для передачи тепла при изменении температуры стенки в ламинарном граничном слое с профилями скоростей по Хартри».** **Паннис** (A remark on «On asymptotic solutions for the heat transfer at varying wall temperatures in a laminar boundary layer with Hartree's velocity profiles». Punnis B.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 7, 505 (англ.)

Отметив, что Шу в названной в заглавии работе (РЖМат, 1954, 4430) получил уравнение $\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{\xi^2}{2}\frac{d\theta}{d\xi} - \varepsilon\xi\theta = 0$ ($\varepsilon > 0$ — параметр) для безразмерной температуры $\theta$ в термическом граничном слое с краевыми условиями $\xi = 0$, $\theta = 1$ и $\xi \to \infty$, $\theta \to 0$, но не решил его, автор приводит для решения указанной задачи готовую формулу

$$\theta = \left[{}_1F_1\left(\frac{2\varepsilon+2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\xi^3}{6}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{2\varepsilon+3}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\varepsilon+2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{\xi}{6^{1/3}} \times {}_1F_1\left(\frac{2\varepsilon+3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\xi^3}{6}\right)\right] \exp\left(-\frac{\xi^3}{6}\right),$$

где ${}_1F_1(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (решение уравнения $z\frac{d^2v}{dz^2} + (c - z)\frac{dv}{dz} - av = 0$). *С. Н. Киро*

265 **Несколько случаев движения цилиндра, вращающегося вокруг своей оси.** **Сапа В. А.**, Изв. АН КазахССР, сер. астроном., физ., матем. и механ., 1953, **3**, № 129, 67—68 (русс.; резюме казах.)

Рассматривается вопрос о поступательном движении цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, которому в начальный момент $t = t_0$ сообщена перпендикулярно его оси начальная скорость поступательного движения $\mathbf{v}_0$. Предполагается, что на цилиндр, кроме силы тяжести и силы сопротивления среды, действует еще подъемная сила, возникающая вследствие вращения цилиндра и вязкости среды (сила Жуковского), которую автор называет силой Магнуса.

Векторное уравнение поступательного движения центра масс записывается в таком виде:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = m\mathbf{g} + \rho 2\pi r^2 l(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{R}, \qquad (1)$$

где $\rho$ — плотность среды, $r$ — радиус цилиндра, $l$ — высота цилиндра; проекции силы сопротивлени $\mathbf{R}$ на оси координат пропорциональны квадратам соответствующих проекций скорости.

Как можно заключить из дальнейшего, угловая скорость вращения цилиндра считается постоянной.

Автор рассматривает уравнения движения для двух случаев: а) ось цилиндра горизонтальна, в) ось цилиндра вертикальна.

Дается приближенное решение уравнений движения для нескольких частных случаев.

В работе большое количество неточностей и опечаток. В § 1 для общего случая проекции силы сопротивления на оси координат записаны в таком виде:

$$R_x = -k\sigma\dot{x}^2, \quad R_y = 0, \quad R_z = k\sigma\dot{z}^2,$$

а далее в том же § 1 для случая в) они имеют вид:

$$R_x = -k\sigma\dot{x}^2, \quad R_y = -k\sigma\dot{y}^2, \quad R_z = -k\sigma_1\dot{z}^2.$$

На стр. 67 в формулах (1.3), (1.1′) и в первом уравнении системы (1.5) вместо $\omega$ стоит $w$. В третьем уравнении (1.5) в первом слагаемом правой части пропущен множитель $\omega$. В заголовке § 3 вместо $A\dot{x} - B\dot{z}^2$ стоит выражение $A\dot{x} - B\dot{z}$. В формуле (2.37) в первом слагаемом правой части в знаменателе пропущен множитель 2 и эта описка переходит в другие формулы, дающие конечный результат. *А. К. Никитин*

266. **Обобщенные мультиполи.** **Люст, Шлютер, Трефц** (Verallgemeinerte Multipolfelder. Lüst Reimar, Schlüter Arnulf, Trefftz Eleonore), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 3, 485—517 (нем.)

Пусть функция $g(r)$ $(0 < r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \infty)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема; пусть $\mathbf{m}$ — орт оси $Oz$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки трехмерного пространства с декартовыми координатами $(x, y, z)$. Положим

$$S_0(g) = g,$$

$$\left.\begin{aligned} S_{n+1}(g) &= (\mathbf{m}\,\mathrm{grad}\,S_n(g)), \\ \mathbf{Q}_n(g) &= \mathrm{grad}\,S_n(g), \\ \mathbf{T}_{n+1}(g) &= [\mathbf{Q}_n(g)\,\mathbf{m}], \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{P}_n(g) = \mathrm{rot}\,\mathbf{T}_n(g) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Определяемые так функции $S_n(g)$ и векторные поля $\mathbf{Q}_n(g)$, $\mathbf{T}_n(g)$, $\mathbf{P}_n(g)$ симметричны относительно оси $Oz$, причем $\mathbf{Q}_n$ и $\mathbf{P}_n$ лежат в меридиональной плоскости, $\mathbf{T}_n$ перпендикулярен ей. Векторные поля $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{T}_n$ названы обобщенными векторными мультиполями (при $g = 1/r$ получаются известные мультиполи). Легко установить, что $\operatorname{rot} \mathbf{Q}_n = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{P}_n = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{T}_n = 0$.

В статье получены различные соотношения между этими полями, например: $\mathbf{Q}_{n+1}(g) = (\mathbf{m}\operatorname{grad})\mathbf{Q}_n(g)$, $\operatorname{rot}\mathbf{P}_n(g) = \mathbf{T}_n(-\Delta g)$, $\Delta\mathbf{T}_n(g) \equiv -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{T}_n(g) = \mathbf{T}_n(\Delta g)$. Изучены скалярные и векторные произведения этих полей на $\mathbf{m}$ или $\mathbf{r}$, произведения типа $S_m(g)S_n(h)$, $S_m(g)\mathbf{Q}_n(h)$, где $h$ — функция типа $g$.

Доказывается, что функция $f(z, r)$, разлагаемая в ряд $\sum f_\nu(r)P_\nu(\cos\theta)$, где $P_\nu(x)$ — полиномы Лежандра, разлагается в ряд вида $\sum_0^\infty S_k(\gamma_k)$, где $\gamma_k$ — подобранные функции типа $g$. Это позволяет разложить цилиндрически симметричное векторное поле на соленоидальную и безвихревую части. Приводится пример задачи о магнитном поле вращающейся звезды, для решения которой применяются введенные мультиполи. *Х. Л. Смолицкий*

**267. Эффект жесткости и неоднородности при виброскопическом определении площади поперечного сечения волокон. Монтгомери** (Effect of stiffness and nonuniformity on vibroscopic determination of filament cross-sectional area. Montgomery D. J.), Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 9, 1092—1099 (англ.)

Рассматривается задача об определении поперечного сечения нити на основании данных, получаемых при наблюдении за ее колебаниями. Наблюдаемыми величинами являются обычно изменение частоты и сдвиг узловых точек. Уравнение собственных колебаний гибкой нити длины $l$ при учете жесткости и непостоянства поперечного сечения имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{\partial X_n}{\partial x}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left[(QS+T)k^2\frac{d^2X_n}{dx^2}\right] + \rho S\omega_n^2 X_n = 0,$$

при граничных условиях закрепленной нити:

$$X_n(0) = X_n'(0) = X_n(l) = X_n'(l) = 0;$$

здесь $T$ — натяжение нити, $S$ — поперечное сечение, $Q$ — модуль упругости, $\omega_n/2\pi$ — собственная частота колебаний, $\rho$ — объемная плотность, $k$ — радиус инерции относительно нейтральной оси.

Принимается, что система обладает малой жесткостью:

$$\alpha^2 = \frac{4QS_0k^2}{Tl^2} \ll 1$$

и имеет малые отклонения от некоторого среднего поперечного сечения:

$$S = S_0(1 + \eta(x)), \quad \eta(x) \ll 1.$$

Тогда, при оставлении членов первого порядка малости, для изменения собственной частоты из-за наличия жесткости и непостоянства поперечного сечения получается выражение

$$\frac{\Delta f_n}{f_{n0}} = -\int_0^1 \eta(\xi)\sin^2 n\pi\xi\, d\xi, \text{ где } f_{n0} = f_0 n(1+\alpha),$$

$$f_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho S_0}}$$

Выражение для сдвига $p$-го узла $q$-й собственной функции имеет вид

$$\delta_{pq} = \xi_{pq} - \xi^0_{pq} = (-1)^p\frac{2}{\pi}\sum_{j\neq q}\left\{\frac{q\sin\frac{j\pi p}{q}}{q^2-j^2}\right\} \times$$

$$\times \int_0^1 \eta(\xi)\sin j\pi\xi\sin q\pi\xi\, d\xi.$$

Далее исследуются отношения между интегральными характеристиками переменного поперечного сечения и измеряемыми величинами $\delta_{pq}$ и $\Delta f_n$ для различных частных случаев (в частности, для степенной и синусоидальной функций $\eta(\xi)$). *Ю. Н. Днестровский*

**268. Задачи об истечении газа со звуковой скоростью. Никольский А. А.**, Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 3, 401—404

Для системы уравнений С. А. Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$$

решается краевая задача, соответствующая истечению поступательно движущейся звуковой струи в сосуд, ограниченный прямолинейными стенками, симметрично наклоненными к оси симметрии потока. Решение дается рядами при независимых переменных $\tau$ и $\beta$. Метод решения состоит в сведении задачи к задаче Коши при помощи продолжения искомого решения в область, лежащую справа от прямой $\tau = \frac{\varkappa-1}{\varkappa-1}$, и аналогичен методу С. А. Чаплыгина (С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Собрание сочинений, т. 2, М — Л, 1948, 19—138). *Г. Н. Положий*

**269. Импульсивное движение плоской плиты. Майлс** (Impulsive motion of a flat plate. Miles John W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 2, 129—140 (англ.)

Исследуется неустановившийся процесс, возникающий при движении бесконечной плоской плиты, занимающей в начальный момент полосу $y = 0$, $|x| < 1$ в невязкой жидкости, под действием внезапно приложенной силы.

Математически задача сводится к решению уравнения

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \varphi_{tt} \tag{1}$$

для потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\varphi_y(x, 0, t) = v(t) \quad (|x|<1,\ t\geqslant 0),\\ &\varphi(x, 0, t) = 0 \quad (|x|>1), \end{aligned} \tag{2}$$

где $v(t)$ — скорость движения плиты, и при условии излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} |r^{1/2}\varphi(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ t)| < K. \qquad (3)$$

В первой части работы ищется сила $f(t)$, вызывающая движение плиты со скоростью $v(t)$. Сила $f(t)$ связана с потенциалом соотношением

$$f(t) = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_t(x,\ 0,\ t)\,dx. \qquad (4)$$

Задача решается применением преобразования Лапласа. Изображение Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ ищется в форме

$$F(s) = sZ(s)V(s). \qquad (5)$$

$Z(s)$ выражается через изображение $\Phi(x,\ y,\ s)$ потенциала $\varphi(x,\ y,\ t)$,

$$Z(s)V(s) = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\Phi(x,\ 0,\ s)\,dx. \qquad (6)$$

Для функции $\Phi(x, y, s)$ имеет место волновое уравнение

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - s^2\Phi = 0. \qquad (7)$$

Это уравнение для малых значений $t$ решается методом Зоммерфельда решения задачи диффракции звуковых волн на краю плоского экрана. Для решения задачи при больших $t$ используется переход к эллиптическим координатам, который дает разложение $Z(s)$ в ряд по функциям Матье.

Во второй части работы решается обратная задача определения скорости движения плиты $v(t)$ при заданной силе $f(t)$. Эти функции связаны соотношением

$$v(t) = f(0)\,y(t) + \int_0^t f(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau. \qquad (8)$$

Изображение Лапласа $Y(s)$ функции $y(t)$ выражается через $Z(s)$

$$Y(s) = s^{-2}Z^{-1}(s), \qquad (9)$$

что позволяет найти $Y(s)$.

Обратное преобразование для $Z(s)$ и $Y(s)$ проводится приближенным образом и дает $z(t)$ и $y(t)$ или при малых значениях $t$, или асимптотически при больших $t$. Полученные формулы позволяют подсчитать значения $z(t)$ и $y(t)$ для всех $t \geqslant 0$ с небольшой точностью. Приведены графики этих функций. *А. Г. Свешников*

**270. Неустановившиеся волны в движущемся потоке. Стокер** (Unsteady waves on a running stream. Stoker J. J.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 4, 471—481 (англ.)

Рассматриваются плоские поверхностные волны в идеальной тяжелой несжимаемой жидкости глубины $h$, ограниченной горизонтальным дном. Координатная ось $x$ располагается в плоскости свободной поверхности до возмущения, потенциал скорости $\Phi$ представляется в виде суммы

$$\Phi(x,\ y,\ t) = Ux + \varphi(x,\ y,\ t),$$

где $t$ — время, $U$ — постоянная скорость одномерного течения жидкости параллельно оси $x$ до образования волн. $\varphi$ ищется как гармоническая функция (потенциал волнового движения при малых колебаниях) в плоскости движения при заданных предельных условиях. В начальный момент $\varphi$ и ее производная по времени равны нулю, на дне удовлетворяется обычное условие равенства нулю нормальной скорости, т. е. $\Phi_y = 0$. В отличие от обычной постановки граничного условия для волн малой амплитуды, граничное условие на свободной поверхности имеет вид

$$\varphi_{tt} + U^2\varphi_{xx} + 2U\varphi_{xt} + g\varphi_y = -\frac{U}{\rho}p_x \quad (y = 0),$$

где $g$ — ускорение силы тяжести, $p$ — давление, $\rho$ — плотность.

Задача решается применением преобразования Фурье, что дает возможность определения $\varphi$ в следующем виде:

$$\varphi(x,\ y,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(s,\ t)\cos hs\,(y+h)\,e^{isx}ds,$$

где $A(s, t)$ строится явно как решение некоторого дифференциального уравнения и в начальный момент обращается в нуль вместе со своей производной по времени.

На основании построенного решения автор исследует предельное состояние рассматриваемого волнового движения. Характер предела зависит от значения $gh/U^2$. В случае, когда $gh/U^2 = 1$, предельного стационарного состояния не существует, так как амплитуда волны растет до бесконечности при $t \to \infty$. *Д. Е. Долидзе*

**271. Динамическое расширение упругого цилиндра. Агабабян Е. Х.**, Укр. матем. ж., 1953, 5, № 4, 375—379

На внутреннюю границу полого упругого цилиндра при $t > 0$ действует постоянное давление $p$. Если при $t = 0$ напряжения в цилиндре отсутствовали, то радиальные отклонения $u(r, t)$ точек цилиндра (где $r$ и $t$ — некоторые безразмерные величины), удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

должны удовлетворять начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

и краевым условиям

$$\sigma_r|_{r=1} = -p,\ \sigma_r|_{r=\frac{b}{a}} = 0\left(\frac{b}{a} > 1\right),$$

где радиальное напряжение

$$\sigma_r = \frac{h}{r}u + k\frac{\partial u}{\partial r}$$

($h$ и $k$ — постоянные). Уравнение (1) приводится к системе

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r},\quad \frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (2)$$

где $\theta = \partial u/\partial r + u/r$, $v = \partial u/\partial t$, которая приближенно интегрируется при указанных дополнитель-

ных условиях по методу сеток с узлами, лежащими в пересечениях эквидистантных семейств характеристик системы (2). При этом конечными разностями заменяются соотношения $dv - d\theta = -\frac{v}{r}\,dr$ и $dv + d\theta = -\frac{v}{r}\,dr$, имеющие место на соответствующих характеристиках. Приведены конкретный пример и графики напряжений как функций $r$ для нескольких значений $t$. *В. И. Левин*

272. **Распространение волн в конечных стержнях из упруго-вязкого материала. Ли, Кантер** (Wave propagation in finite rods of viscoelastic material. Lee E. H., Kanter I.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1115—1122 (англ.)

Для упруго-вязкого материала принимается справедливость следующего соотношения:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mu\sigma,$$

где $\sigma$ — напряжение, а $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u = u(x, t)$ — перемещение в направлении оси стержня, $E$ и $\mu$ — постоянные материала. Из уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

выводится уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} = f(x),$$

где $f(x)$ — произвольная функция, $c^2 = \frac{E}{\rho}$, $\rho$ — плотность ненапряженного материала. Для полученного телеграфного уравнения формулируется несколько задач, связанных с распространением плоских волн в упруго-вязкой среде (см. также Зверев И. Н., Прикл. матем. и механика, 1950, 15, 295—302). Кратко излагаются известные методы интегрирования телеграфного уравнения, и решения анализируются с точки зрения механики сплошных сред. *В. И. Левин*

273. **О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. Баренблатт Г. И.,** Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 4, 455—460

Рассматривается распространение плоских волн в среде, занимающей полупространство $x \geqslant 0$, для которой зависимость напряжений от деформаций определена соотношением

$$\sigma = \rho_0 V^2 \varphi(\varepsilon),$$

где $\sigma$ — напряжение, $\rho_0$ — начальная плотность, $V$ — постоянная с размерностью скорости, $\varepsilon$ — деформация; $\varphi(\varepsilon)$ — функция, обладающая непрерывной второй производной.

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^3\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = a = \text{const} > 0.$$

Постановка и решение при $\varphi'' \leqslant 0$ даны Х. А. Рахматулиным (Прикл. матем. и механика, 1945, 9, № 1; Уч. зап. МГУ, 1951, № 152). В реферируемой работе получены и исследованы решения для случая произвольной $\varphi(\varepsilon)$.

Метод исследования, основанный на теории размерности и предложенный Л. И. Седовым (Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1951), впервые применен к динамическим задачам теории упругости.

В статье имеются неточности. В формулах (2.10) и (2.14) следует изменить знаки соответственно перед $u(x, t)$ и $A$.

Формулу (3.4) нужно писать так:

$$D = [\xi^* - f(\xi^*)]\,V, \quad V_1 = -Vf_1(\xi^*) + \xi^* V f_1'(\xi^*), \; V_2 = -Vf_2(\xi^*) + \xi^* V f_2'(\xi^*).$$

Эти неточности не влияют на последующие результаты. *Г. Я. Галин*

274. **Осесимметричный поток идеальной несжимаемой жидкости, обтекающий сплошной тор. Стернберг, Садовский** (Axisymmetric flow of an ideal incompressible fluid about a solid torus. Sternberg E., Sadowsky M. A.), J. Appl. Mech. 1953, 20, № 3, 393—400 (англ.)

Для системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho},$$

где $\rho$ и $z$ — цилиндрические координаты, методом разделения переменных находится решение, соответствующее осесимметричному обтеканию сплошного тора потоком несжимаемой идеальной жидкости при заданной скорости на бесконечности.

Пусть $x$, $y$, $z$ — прямоугольные координаты, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — тороидальные координаты,

$$x = \frac{\bar{q}}{q - p}\cos\gamma, \qquad y = \frac{\bar{q}}{q - p}\sin\gamma,$$

$$z = \frac{\bar{p}}{q - p};$$

$$p = \cos\alpha, \quad q = \operatorname{ch}\beta, \quad \bar{p} = \sin\alpha, \quad \bar{q} = \operatorname{sh}\beta;$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi.$$

Сечение поверхности тора плоскостью $\gamma = \text{const}$ записывается в виде $\beta = \beta_0 = \text{const}$ и задача сводится к нахождению в области $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ решения системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\mu^2}{\bar{q}}\frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\mu^2}{\bar{q}}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad \mu = \sqrt{q - p},$$

подчиненного краевым условиям

$$\psi(\alpha, \beta_0) = c = \text{const},$$

$$\psi(\alpha, \beta) \to \psi_\infty = \frac{\rho^2}{2} \text{ при } (\alpha, \beta) \to (0, 0).$$

Решение получается в виде ряда

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\rho^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi_n,$$

где

$$\psi_n = \frac{q^2}{\mu} P'_{n-1/2}(q) \cos n\alpha,$$

$$a_n = \left(\frac{2c}{4n^2-1} + 1\right) A_n,$$

$$c = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{4n^2-1}},$$

$$A_n = \frac{2\sqrt{2} Q'_{n-1/2}(q_0)}{\pi(1+\delta_{n0}) P'_{n-1/2}(q_0)},$$

$P_{n-1/2}(q)$, $Q_{n-1/2}(q)$ — функции Лежандра первого и соответственно второго рода, $\delta_{n0}$ — кронекеров ский символ. В виде аналогичного ряда находится функция $\varphi(\alpha, \beta)$. Приводятся числовые примеры.

Работа является продолжением исследований по краевым задачам теории потенциала для тора (см., например, В. Е. Дьяченко, Укр. фіз. зап., 1935, 3, № 2, 53—65). *Г. Н. Положий*

**275. Об асимметричном потоке в осесимметричном компрессоре.** **Серс** (On asymmetric flow in an axial-flow compressor stage. Sears W. R.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 1, 57—62 (анг.)

Вопрос сводится к изучению характера решения следующей краевой задачи:

при $x < 0$

$$\nabla^2\psi = 0 \text{ и } u|_{x=-\infty} = U,\ v|_{x=-\infty} = U\alpha;$$

при $x > 0$

$$\nabla^2\psi = k\gamma'(y) \text{ и}$$

$$u|_{x=+\infty} = \frac{p_{-\infty} - p_{+\infty}}{\rho U} + k\gamma(y),\ v|_{x=+\infty} = v_\infty$$

и при $x = 0$

$$v(-0, y) - v(+0, y) = \gamma(y),$$
$$u(-0, y) = u(+0, y) = u_0(y).$$

Здесь $\psi(x, y)$ — потенциал скоростей, $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\gamma(y)$ — плотность циркуляции, $p_{-\infty}$ и $p_{+\infty}$ — гидростатические давления при $x = -\infty$ и $x = +\infty$ соответственно. Решение может быть представлено в виде суммы $\psi^{(1)} + \psi^{(2)}$, где $\psi^{(2)}$ соответствует ротационному потоку и не нарушает симметричности, а $\psi^{(1)}$ — функция, гармоническая в полуплоскости $x > 0$ и в полуплоскости $x < 0$ и удовлетворяющая условиям

$$u^{(1)}|_{x=\pm\infty} = v^{(1)}|_{x=\pm\infty} = 0$$

и

$$u^{(1)}(-0, y) = u_0(y),$$
$$u^{(1)}(+0, y) = u_0(y) - k\gamma(y),$$
$$v^{(1)}(-0, y) - v^{(1)}(+0, y) = \gamma(y).$$

Выводится формула

$$v^{(1)}(-0, y) + v^{(1)}(+0, y) = -\frac{k}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\eta)}{y-\eta}\, d\eta,$$

которая позволяет полностью определить поток при $x = +0$ и $x = -0$. *В. И. Левин*

**276. Двумерные потенциальные течения со свободной границей.** **Джон** (Tho-dimensional potential flows with a free boundaru. John Fritz), Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 4, 497—503 (англ.)

Дается способ построения картины двумерного потенциального течения несжимаемой жидкости в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ со свободной границей $C_t$. Уравнение $C_t$ записывается с помощью координаты Лагранжа $w$ в виде $z = f(w, t)$, после чего условие постоянства давления вдоль $C_t$ приводит к дифференциальному уравнению

$$f_{tt} + ig = ir(w, t) f_w,$$

где $g$ — ускорение силы тяжести, $r(w, t)$ — некоторый коэффициент, имеющий вещественные значения при вещественных значениях аргументов.

С другой стороны, уравнение кривой $C_t$ можно записать в виде

$$y = k(x, t),$$

где $k$ — аналитическая функция своих аргументов. Тогда условие постоянства давления вдоль $C_t$ дает следующее дифференциальное уравнение для $x(t)$:

$$k_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2k_{xt}\frac{dx}{dt} + k_{tt} + k_x\frac{d^2x}{dt^2} + g = \frac{1}{k_x}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Используя решение последнего уравнения, зависящее от параметра $w$, находим

$$r = (f_{tt} + ig)/if_w = -x_{tt}/k_x x_w.$$

Комплексный потенциал скорости $F(z, t)$ следует определить как аналитическую функцию $z$, удовлетворяющую на $C_t$ условию

$$f_t = \overline{F}_z.$$

Рассматривая несколько частных случаев, автор дает примеры построения комплексного потенциала, соответствующие разным типам поверхностных волн, по предложенному способу. *Д. Е. Долидзе*

**277. О единственности решения внешних задач теории установившихся упругих колебаний.** **Свешников А. Г.**, Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 2, 253—256

Дается обоснование принадлежащего автору «принципа предельного поглощения», с помощью которого можно установить условия излучения, обеспечивающие единственность решения внешних краевых задач теории установившихся колебаний (Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953).

Для волнового уравнения доказана теорема: предел ограниченного на бесконечности решения внешней краевой задачи

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad u|_S = \varphi(P, k) \qquad (A)$$
$$(k = k_0 + i\varepsilon, \ \varepsilon > 0)$$

при $\varepsilon \to 0$ существует и является решением внешней краевой задачи

$$\Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0, \quad u_0|_S = \varphi_0(P, k_0), \qquad (B)$$

удовлетворяющим условию излучения. Функция $\varphi(P, k)$ определяется условием $\lim \varphi(P, k) = \varphi_0(P, k_0)$ при $k \to k_0$. Задача (A) имеет решение, так как число $k^2$ комплексное. Решение задачи (B) автор определяет в виде

$$u_0(M) = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G_0(M, Q, k_0)\, \nu_0(Q)\, d\sigma,$$

где $G_0$ — функция Грина краевой задачи с условием $\partial G_0 / \partial n = 0$ на $\Sigma_0$ для области вне $\Sigma_0$, причем $\Sigma_0$ является сферой, так расположенной внутри $S$, чтобы интегральное уравнение

$$\nu_0(P) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G_0(P, Q, k_0)\, \nu_0(Q, k_0)\, d\sigma =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \varphi_0(P, k_0)$$

было разрешимо. Этого можно добиться, например, соответствующим выбором радиуса $\Sigma_0$. Затем строится разрешимое интегральное уравнение, соответствующее задаче (A) в силу подстановки:

$$u(M) = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_Q} G(M, Q, k)\, \nu(Q)\, d\sigma,$$

где $G$ — функция Грина внешней для $\Sigma_0$ краевой задачи с условием $\partial G / \partial n = 0$ на $\Sigma_0$. Из равенства $\lim G(P, Q, k) = G_0(P, Q, k_0)$ при $k \to k_0$ следует, что $\lim \nu(P) = \nu_0(P)$. Тем самым обоснован предельный переход $u_0 = \lim u$ и доказана единственность решения.

Далее изучается предельный переход в применении к уравнениям теории упругости

$$(\lambda + 2\mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{u} - \mu\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u} + k^2 \mathbf{u} = 0$$
$$(k = k_0 + i\varepsilon, \ \varepsilon > 0)$$

для первой внешней краевой задачи. Доказана теорема, в силу которой предельный вектор $\mathbf{u}_0(M, k_0)$ при $k \to k_0$ является единственным решением первой внешней краевой задачи для $k = k_0$. Основой доказательства служит возможность выбора соответствующей сферы $\Sigma_0$. Единственность решения обеспечивает выполнимость условий излучения И. Н. Векуа и В. Д. Купрадзе (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 3, 55, 21—74).

Указывается на применимость аналогичного метода обоснования «принципа предельного поглощения» в задачах диффракции электромагнитных волн для ограниченных поверхностей.

*И. С. Аржаных*

278. **Две проблемы плоской теории упругости.** **Вегнер** (Zwei Probleme der ebenen Elastizitätstheorie. Wegner U.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 8—9, 300—303 (нем.)

Определяются напряжения $\sigma_x$ и $\sigma_y$ в прямоугольной шайбе, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega$ вокруг одной из осей. Если плоскость $z = 0$ совпадает со средней плоскостью шайбы, то в качестве оси вращения берется ось $x$. В тех случаях, когда отношение длин сторон шайбы порядка единицы, т. е. шайба лишь немного отличается от квадратной, обычно применяемые формулы теории балок дают неверные результаты и необходимо применение более полной теории. Проблема сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta F_i = -\frac{m-1}{m} \Delta U, \quad \text{где } U = -\frac{\omega^2 \gamma}{2g} y^2,$$

с соответствующими граничными условиями на внешней и внутренней поверхностях шайбы. Если в качестве частного решения неоднородного уравнения взято выражение

$$F_0 = \frac{m-1}{24m} \frac{\omega^2 \gamma}{g} y^4 \text{ и } F_i = F_0 + F_h,$$

то функция $F_h$ должна удовлетворять однородному уравнению

$$\Delta\Delta F_h = 0$$

и граничным условиям вида

$$F_h\big|_{\Gamma_a} = \frac{1}{24m} \frac{\omega^2 \gamma}{g} y^4 + \frac{\omega^2 \gamma}{4g} H^2 x^2$$

на внешней поверхности шайбы $\Gamma_a$ и

$$F_h\Big|_{\Gamma_i} = \frac{1}{24m} \frac{\omega^2 \gamma}{g} y^4 + \frac{\omega^2 \gamma}{4g} h^2 x^2 + Ax + By + C$$

на внутренней поверхности шайбы $\Gamma_i$. Здесь $2H$ и $2h$ — внешние и внутренние размеры шайбы по оси $y$; $A$, $B$ и $C$ — неопределенные константы, обусловленные двусвязностью рассматриваемой области.

Далее рассматривается вариационная задача, эквивалентная поставленной граничной задаче, и строится приближенное решение.

Во второй части работы при помощи уравнения теплопроводности определяются напряжения на поверхности соприкосновения двух одинаковых прямоугольных шайб с учетом распределения температур в шайбах и теплообмена с окружающей средой.

*Ю. Н. Днестровский*

279. **Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплен тонким упругим кольцом.** **Флейшман Н. П.**, Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, 22, № 5, 84—95

Дан расчет круглой кольцевой плиты, когда по одному из контуров приложены внешние усилия $p(\theta)$ и моменты $m(\theta)$, а край второго контура плиты подкреплен впаянным тонким упругим кольцом постоянного поперечного сечения, состоящим из другого материала. Подкрепляющее кольцо принимается за тонкий упругий стержень, деформация которого описывается уравнениями малых деформаций тонких криволинейных стержней, а условия спая между плитой и кольцом рассматриваются не

по внешнему контуру кольца, а по его осевой линии. Внешняя нагрузка предполагается таковой, что функция $p(\theta)$ удовлетворяет условию Дирихле, а функция $m(\theta)$ имеет первую производную, удовлетворяющую условию Дирихле.

Для кольцевой плиты, загруженной по внешнему краю равномерно распределенной нагрузкой $p = \text{const}$, а внутренний край которой, подкрепленный упругим кольцом, свободно оперт, определена оптимальная жесткость подкрепляющего кольца.

*Г. Н. Савин*

**280. Определение плоского напряженного состояния в упругом цилиндре эллиптического сечения. Лески** (Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro elastico a sezioni ellittiche. Lesky Peter), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, **6**, 3—4, 255—267 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Упругое напряженное состояние называется плоским, если составляющие напряжений $t_{xx}$, $t_{xy}$, $t_{yy}$ не зависят от $z$, а $t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0$. В этом случае составляющие смещения определяются формулами

$$u = \alpha z^2 - \alpha x^2 + 2\frac{\beta}{\sigma} xy - \frac{\alpha}{\sigma} y^2 + \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma x + \\ + 2\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y) - \varphi(x, y);$$

$$v = \beta z^2 - \frac{\beta}{\sigma} x^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma} xy - \beta y^2 + \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma y - \\ - 2\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y) + \psi(x, y);$$

$$w = -2z(\alpha x + \beta y + \gamma).$$

Здесь $E$ — модуль Юнга, $\sigma$ — постоянная Пуассона, $\varphi$ и $\psi$ — сопряженные гармонические функции, а функция $\Phi$ определяется через заданные объемные силы. В частном случае, когда

$$X = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad Z = 0$$

можно в качестве $\Phi(x,y)$ взять любое решение уравнения $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = F$. Наконец, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — постоянные.

Ставится задача об определении плоского напряженного состояния в бесконечном упругом цилиндре эллиптического сечения, если известна нормальная составляющая $T(s)$ ($s$ — длина дуги контура) внешних сил, действующих на цилиндр. Задача сводится к нахождению гармонической функции $\varphi(x, y)$ по данным значениям ее косой производной:

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1+\sigma}{E}\left\{\frac{E}{\sigma}[2\alpha x \sin^2(n, x) + 2\beta y \cos^2(n,x) + \gamma] + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\nu}\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d}{d\nu'}\frac{d\Phi}{dx} - T(s)\right\} = f(s).$$

Здесь $n$ — нормаль к контуру сечения цилиндра, а направления $\nu$ и $\nu'$ связаны с $n$ соотношениями

$$(\nu, x) = 2(n, x); \quad (\nu', x) = 2(n, x) + \frac{\pi}{2};$$

Преобразование

$$x = \left(\frac{1+q}{2}\rho + \frac{1-q}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,$$

$$y = \left(\frac{1+q}{2}\rho - \frac{1-q}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta$$

переводит эллипс с полуосями 1 и $q < 1$, разрезанный по фокальной оси в кольцо $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $\rho_0 = \sqrt{\frac{1-q}{1+q}}$. В переменных $\rho$ и $\theta$ уравнение и краевое условие для $\varphi$ принимают вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0,$$

$$\rho\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} f(\theta)(q^2\cos^2\theta + \sin^2\theta) = F(\theta). \quad (2)$$

К этому надо добавить условия

$$\varphi(\rho_0, \theta) = \varphi(\rho_0, -\theta);$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(\rho, \theta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = -\left.\frac{\partial\varphi(\rho, -\theta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}. \quad (3)$$

Искомая функция разлагается в ряд Фурье по $\theta$; уравнения (1)—(3) позволяют выразить коэффициенты Фурье функции $\varphi$ через коэффициенты Фурье функции $F(\theta)$. При этом оказывается, что решение существует тогда и только тогда, когда $F(\theta)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos 2k\tau}{1+\rho_0^{4k}}\rho_0^{1k} + 1\right]d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\rho_0^{4k+2}}\left(1+\rho_0^2\right)\rho_0^{2k} + \cos\tau\right]d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\tau}{1-\rho_0^{4k+2}}\left(1+\rho_0^2\right)\rho_0^{2k} + \sin\tau\right]d\tau = 0.$$

Эти условия позволяют определить постоянные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и тем самым до конца решить задачу.

*С. Г. Михлин*

**281. Простой вывод формулы для дифракционной волны в теории Кирхгофа. Рубинович** (Eine einfache Ableitung des Ausdruckes für die Kirchhoffsche Beugungswelle. Rubinowicz A.), Acta phys. polon., 1953, **12**, № 3—4, 225—229 (нем.; резюме русск.)

Исследуется появляющийся в ряде задач дифракции интеграл

$$u_K = \int_F V_n df, \quad (1)$$

где $V = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^{ikr}}{r}\operatorname{grad}\frac{e^{ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\operatorname{grad}\frac{e^{ikr}}{r}\right\}$,

$F$ — поверхность, стягивающая диффракционное отверстие, $n$ — нормаль к $F$, $\rho$ — расстояние от источника до точки интегрирования, $r$ — расстояние от точки наблюдения до точки интегрирования.

Автор показывает, что (1) может быть представлено в виде

$$u_K = u_E + u_B,$$

где $u_E$ — прямо прошедшая волна $\frac{e^{ikR}}{R}$ геометрической оптики, $u_B$ — диффрагированная волна.

Для $u_B$ автор с помощью теоремы Стокса получает выражение

$$u_B = -\frac{1}{4\pi}\int_B \frac{e^{ik(r+\rho)}}{r\rho}\cdot\frac{[\mathbf{r}\rho]\,ds}{r\rho + (\mathbf{r}\rho)},$$

здесь $ds$ — линейный элемент контура отверстия $B$.

Это выражение получалось автором и в более ранних работах, но лишь в специальных системах координат. *Ю. Н. Днестровский*

**282. Отражение электромагнитных волн от неоднородных граничных поверхностей, имеющих периодическую структуру в направлении, перпендикулярном вектору $E$. Мюллер** (Reflexion elektromagnetischer Wellen an inhomogenen Grenzflächen mit einer zum E-Vektor senkrechten periodischen Struktur. Müller Reinhard), Arch. elektr. Übertrag., 1953, **7**, № 10,492—500 (нем.)

В первом разделе настоящей работы рассматривается задача диффракции плоской электромагнитной волны

$$\left(E_z = E_0\, e^{i(\omega t-\alpha x)};\quad H_y = H_0 e^{i(\omega t-\alpha x)}\right)$$

на системе бесконечно длинных идеально проводящих металлических полос, расположенных в направлении оси $z$. Высота полосы $d$, толщина $\delta$, расстояние между полосами $\Delta$. Пространство между полосами заполнено веществом конечной проводимости.

Предполагая, что $\lambda \gg \delta \gg \Delta$; $\lambda > d + \Delta$, $d \gg \Delta$, автор формулирует при $x = 0$ следующие приближенные граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &E_z = E_s\, e^{i(\omega t+\varphi)}, && 0 < z < \Delta \\ &E_z = 0, && \Delta < z < \Delta + d \\ &E_z = E_s e^{i(\omega t+\varphi)}, && \Delta + n < z < 2\Delta + d \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

считая при этом, что $E_s e^{i\varphi}$ является постоянной ($E_s$ — вещественно и положительно).

Исходя из уравнения для $E_z$

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

и граничных условий (1), нетрудно получить выражения для компонент поля в области $x < 0$.

Составив циркуляцию $H$ по контуру, получающемуся сечением неметаллического слоя горизонтальной плоскостью на высоте $h = \frac{\Delta}{2(\Delta + d)}$, автор показывает, как можно выразить $E_s e^{i\varphi}$ через амплитуду падающей волны $E_0$.

Малость $\delta$ по сравнению с $\lambda$ позволяет приближенно считать, что при $x = \delta$ также имеют место граничные условия (1), откуда можно получить выражения для компонент поля в области $x > \delta$.

Во втором разделе рассматривается прямоугольный волновод ширины $a$ и высоты $b$ с идеально проводящими стенками, в который вставлена идеально проводящая диафрагма со щелью посредине, высота которой равна $\Delta$.

В предположениях, аналогичных предыдущим, исследуется поле в такой системе, создаваемое волной $H_{10}$.

Автор отмечает, что к рассмотренной задаче сводится задача первого раздела, но с косым падением исходной волны на систему (падающая волна имеет отличные от нуля $H_x$, $H_y$, $E_z$).

В третьем разделе рассматривается задача, аналогичная первой, но вместо условия $\lambda \gg \delta$ предполагается, что $\lambda \ll \delta$.

В четвертом разделе рассматривается прохождение и отражение волны в прямоугольном волноводе, в котором при $x = 0$ скачком изменяется высота.

*Д. П. Костомаров*

**283. Элемент тока вблизи края проводящей полуплоскости. Харрингтон** (Current element near the edge of a conducting half-plane. Harrington Roger F.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 5, 547—550 (англ.)

Исследование электромагнитного поля, создаваемого постоянным током, текущим по бесконечно длинному проводу ($x = a$; $z = -b$), расположенному над краем проводящей полуплоскости ($x = 0$; $z < 0$), сводится к решению волнового уравнения

$$\Delta\,\psi(x, z) = \beta^2\,\psi(x, z) \qquad (1)$$

при условии излучения и краевом условии

$$\psi(x, z) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ z < 0. \qquad (2)$$

Решение ищется в виде

$$\psi(x, z) = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}\left(\beta\sqrt{(x-a)^2 + (z+b)^2}\right) + \\ + \frac{1}{4j}\int_{-\infty}^{0} J(z_1)\, H_0^{(2)}\left(\beta\sqrt{x^2 + (z-z_1)^2}\right) dz_1, \qquad (3)$$

где $J(z)$ означает плотность тока в полуплоскости. Для определения неизвестной плотности тока $J(z)$ из соотношений (2) и (3) получают интегральное уравнение, которое решается применением двустороннего преобразования Лапласа. Найденное изображение $J(z)$ используется для построения асимптотического выражения $\psi(x, z)$ при больших расстояниях от прямой. *Э. Я. Риекстыньш*

**284. О несуществовании поверхностной волны Зоммерфельда. Пуэнсело** (Sur l'inexistence de l'onde de surface (Oberflächenwelle) de Sommerfeld. Poincelot Paul), Ann. télécommuns, 1953, **8**, № 6, 206,—211 (франц.)

Решение Зоммерфельда (1909) известной задачи об излучении диполя, находящегося в плоскости раздела двух сред (плоская земля) и перпендикулярного к ней, содержит интеграл

$$\int\limits_{(L_1)+(C)+(L_2)} \frac{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}-k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\lambda^2-s^2}\times$$

$$\times H_0^{(1)}(\lambda r)\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\,\lambda\, d\lambda, \qquad (1)$$

где $s^2=\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2+k_2^2}$, $|k_1|<|k_2|$, $0<\arg k_1<\arg k_2<\frac{\pi}{4}$, $(L_1)$ и $(L_2)$ — петли, обходящие точки $k_1$ и $k_2$ по гиперболическим разрезам, вдоль которых соответственно $\lambda^2-k_1^2=-\tau_1^2$ и $\lambda^2-k_2^2=-\tau_2^2$ ($\tau_1$ и $\tau_2$ действительны), $(C)$ — контур, содержащий полюс $s$ (при этом $\sqrt{\lambda^2-k_1^2}$ и $\sqrt{\lambda^2-k_2^2}$ определены условием, что при действительных $\lambda$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-k_1^2}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-k_2^2}=1$ и $\lambda=s$ обращает в нуль $N(\lambda)=k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}$). Математическое содержание статьи сводится к замечанию, что в окончательное выражение интеграла (1), полученное Зоммерфельдом для целей асимптотических разложений, вычет подинтегральной функции в точке $s$ (так называемая поверхностная волна Зоммерфельда) не должен входить.

Примечание референта. Утверждение автора известно (см., например, Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.—М., 1937, 967 (примечание В. А. Фока)). В статье имеются неточности в формулах, список литературы неполон. *В. И. Левин*

**285. Волновая задача для параболического зеркала. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.,** Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 961—963

Решается задача об установившихся электромагнитных колебаниях, вызванных линейным источником, помещенным внутри идеально проводящего экрана, имеющего форму параболического цилиндра.

Поставленная физическая проблема приводится к следующей математической задаче:

Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\Delta u+k^2u=0 \quad \left(k=\frac{\omega}{c}\right), \qquad (1)$$

регулярное внутри параболического цилиндра $r=x+2a$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, за исключением линии $x=y=0$, в окрестности которой

$$u=-\frac{\pi\omega I}{c^2}H_0^{(2)}(kr)+W, \qquad (2)$$

которое обращается в нуль на поверхности цилиндра и удовлетворяет следующему условию излучения на бесконечности

$$u=O\left(r^{-\frac{1}{4}}\right);\ \frac{\partial u}{\partial r}+iku=o\left(r^{-\frac{1}{4}}\right), \qquad (3)$$

где $W$ — регулярная функция.

Решение задачи ищется в виде суммы поля источника и вторичного поля. Путем разделения переменных в параболической системе координат $(\alpha, \beta)$, строится совокупность частных решений уравнения (1), регулярных внутри параболического цилиндра и удовлетворяющих принципу излучения. Интегрированием частных решений по параметру вторичное поле представляется в виде комплексного интеграла. Функция $u$, удовлетворяющая условиям задачи, дается в следующем виде:

$$u=-\frac{\pi\omega I}{c^2}H_0^{(2)}(kr)+$$

$$+\frac{\omega I}{2\pi\sqrt{\pi}c^2}\int\limits_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty}\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\times$$

$$\times\left[B_\nu^{(3)}(\beta_0)/B_\nu^{(1)}(\beta_0)\right]B_\nu^{(1)}(\beta)A_\nu^{(1)}(\alpha)\,d\nu, \qquad (4)$$

где

$$A_\nu^{(1)}(\alpha)=B_{-\nu-1}^{(1)}(\alpha)=e^{-\frac{1}{2}ik\alpha^2}F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ ik\alpha^2\right).$$

$$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,(\nu)<0,$$

$F(\alpha,\ \gamma,\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$B_\nu^{(3)}(\beta)=(ik\beta^2)^{-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)W_{-\frac{1}{4},-\frac{\nu}{2},\frac{1}{5}}(ik\beta^2),$$

$W_{\lambda,\mu}$ — функция Уиттекера, $-\infty<\alpha<\infty, 0\leqslant\beta<\infty$.

В случае $|\alpha|<\beta$ формуле (4) придается вид:

$$u=-\frac{\pi\omega I}{c^2}H_0^{(2)}(kr)+$$

$$+\frac{2\omega iI}{\sqrt{\pi}c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\left[B_{2n}^{(3)}(\beta_0)/B_{2n}^{(1)}(\beta_0)\right]\times$$

$$\times B_{2n}^{(1)}(\beta)A_{2n}^{(1)}(\alpha), \qquad (5)$$

где $A_{2n}^{(1)}(\alpha)$ связаны с полиномами Эрмита так:

$$A_{2n}^{(1)}(\alpha)=(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}e^{-\frac{1}{2}ik\alpha^2}H_{2n}\left(\sqrt{ik}\alpha\right).$$

Доказывается также, что решение не может быть представлено во всей области $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$ в виде ряда по полиномам Эрмита, так как (5) не существует при $|\alpha|>\beta$.

В целом рецензируемая работа пополняет, уточняет и обобщает результаты, полученные в работах Эпштейна (Epstein P. S., Dissertation. München. Encyklopädie der Math. Wissensch., 1914, 5, 3, 511) и Магнуса (Magnus W., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1940, 50, 140; Z. Physik, 1941, 118, 343).

*Д. З. Авазашвили*

**286. Решение электромагнитной проблемы рассеяния в виде ряда по степеням отношения: размер рассеивателя / длина волны. Стивенсон** (Solution of electromagnetic scattering problems as power series in the ratio (Dimension of scatterer) wavelength. Stevenson A. F.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1134—1142 (англ.)

Рассматривается вопрос о рассеянии электромагнитной волны в вакууме на теле произвольной фор-

мы с комплексными электромагнитными постоянными $\varepsilon$ и $\mu$.

Задача решается непосредственным интегрированием уравнений электромагнитного поля с обычными граничными условиями на поверхности тела. Решение ищется в виде разложения векторов поля **E** и **H** вне и внутри рассеивателя в ряды по степеням волнового числа $k$:

$$\mathbf{E} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{E}_p (ik)^p, \quad \mathbf{H} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{H}_p (ik)^p.$$

$$\mathbf{E}^{(i)} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{E}_p^{(i)} (ik)^p, \quad \mathbf{H}^{(i)} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{H}_p^{(i)} (ik)^p.$$

Коэффициенты $\mathbf{E}_p$, $\mathbf{E}_p^{(i)}$, $\mathbf{H}_p$, $\mathbf{H}_p^{(i)}$ находятся последовательно, путем решения ряда обычных задач теории потенциала.

Ввиду ухудшения сходимости рядов на больших расстояниях от рассеивателя, автор строит решение в дальней зоне в виде степенных рядов по $(kr)$. Развитый в статье метод позволяет дать численное решение ряда задач о рассеянии электромагнитной волны на сфере, эллипсоиде и других телах.

*К. А. Барсуков*

287. **Рассеяние электромагнитной волны на эллипсоиде в третьем приближении. Стивенсон** (Electromagnetic scattering by an ellipsoid in the third approximation. Stevenson A. F.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1143—1151 (англ.)

В статье на основе метода, развитого автором в предыдущей работе (см. реф. 286), решается ряд частных задач о рассеянии электромагнитной волны.

1. В качестве рассеивателя берется трехосный эллипсоид, обладающий конечной проводимостью. Вычисляются первые три члена ряда, фигурирующего в решении; член, пропорциональный $k^3$, обращается в нуль. Кроме того, рассчитывается коэффициент рассеяния эллипсоида и приводится решение для более простых случаев (сфера, эллипсоид вращения). Полученные результаты обобщаются на случай эллипсоида бесконечной проводимости.

2. В том же приближении решаются задачи о рассеянии электромагнитной волны на идеально проводящем эллиптическом диске и на эллиптическом отверстии в идеально проводящем экране.

*К. А. Барсуков*

288. **Влияние гофрировки поверхностей на собственные колебания и потери в электромагнитных резонаторах. Компанеец А. С., Саясов Ю. С.**, Ж. техн. физики, 1953, 23, № 12, 2185—2199

Для подсчета потерь в гофрированных стенках цилиндрического резонатора авторы используют два метода: метод частных решений и метод конформных отображений. Задача решается в предположении малости размеров бороздок по сравнению с длиной волны.

1. Метод частных решений заключается в следующем. Пусть $U(r, \varphi)$ есть функция, через которую выражается поле поперечного магнитного типа, и пусть бороздки направлены вдоль оси резонатора. Возьмем частное решение волнового уравнения в виде

$$U(r, \varphi) = J_0(\alpha, r) + \varepsilon J_n(\alpha, r) \cos n\varphi,$$

где $\varepsilon$ — малый параметр, $\alpha r_0$ — корень функции $J_0$, $r_0$ — радиус негофрированной поверхности. Подберем уравнение поверхности стенки таким образом, чтобы на стенке выполнялось условие $U = 0$. Пусть уравнение контура поперечного сечения стенки будет

$$r = r_0 (1 + \xi(\varphi)/n).$$

Если $n$ достаточно велико, из граничного условия приближенно можно найти $\xi \exp(-\xi) = \cos n\varphi / z$, где $z$ определяет глубину бороздок. Потери энергии можно подсчитать, вычислив интеграл $\int H_t^2 \, dl$, где $H_t$ — тангенциальная составляющая магнитного поля.

Для случая бороздок, перпендикулярных оси резонатора, за частное решение авторы берут следующее:

$$U = J_0(\alpha r) - \varepsilon \cos \varkappa z \cdot \frac{I_0(r\sqrt{\varkappa^2 - \alpha^2})}{I_0(r_0\sqrt{\varkappa^2 - \alpha^2})}.$$

Пользуясь малостью размеров бороздок и условием равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенке, можно получить уравнение образующей цилиндрического резонатора

$$dx/dy = (\beta x e^{-x} - \cos y)/\sin y,$$

где $x = \varkappa(r - r_0)$, $y = \varkappa z$, $\beta = \alpha^3 J_1(2,4)/\varepsilon \varkappa^3$.

2. Метод конформных отображений можно применить на том основании, что размеры бороздок малы по сравнению с длиной волны. Около стенки функция $U$ приближенно удовлетворяет уравнению Лапласа, а на стенке обращается в нуль (бороздки параллельны оси резонатора). Введем декартову систему координат $x = r\varphi$, $y = r - r_0$. Пусть $z = x + iy$, $W(z) = V + iU$. Искомая функция $U$ будет соответствовать такому отображению, которое линию, периодическую по $x$ в плоскости $z$, переводит в прямую $U = 0$ плоскости $W$. Выражение для потерь имеет вид $\int dV \left| \frac{dl}{dV} \right|$, где $l$ — направление касательной к стенке. Для периодической ломаной линии, пользуясь уравнением Кристоффеля-Шварца

$$dz/dW = \prod_i (W - V_i)^{\Delta\alpha_i},$$

авторы получают формулу отображения

$$dz/dW = \prod_{k=1}^{n} [\sin \pi (W - V_k)]^{\Delta\alpha_k}$$

($\pi$, $\alpha_i$ — углы отрезков ломаной с осью абсцисс). Последняя формула используется при вычислении потерь для треугольных и прямоугольных бороздок. Кроме ломаных линий, рассмотрено отображение гладких кривых, в частности кривой, определяемой уравнением

$$z = \int_0^W \exp\{-Ai \exp(2\pi i t)\} \, dt.$$

Как показывают расчеты, потери энергии в резонаторе с гофрированными стенками возрастают либо в одинаковом, либо в меньшем отношении с эффективной поверхностью стенки, что согласуется с экспериментальными данными. *П. П. Бирюлин*

**289. О расчете электронных линз по заданным фокусирующим свойствам в параксиальной области. Касьянков П. П.**, Ж. техн. физики, 1953, **23**, № 3, 531—540

Предлагается метод расчета электронных линз по заданному фокусному расстоянию и величине увеличения. Строится потенциал электростатического поля на оси цилиндрически-симметричной системы. При помощи метода сеток потенциал распространяется на все поле.

Для квадратной сетки с шагом $h$ в меридиональной плоскости имеют место следующие уравнения в конечных разностях:

для неосевых узлов

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \left(1 - \frac{h}{2r_0}\right)\varphi_3 + \left(1 + \frac{h}{2r_0}\right)\varphi_4 - 4\varphi_0 = 0, \quad (1)$$

для узлов на оси системы

$$\varphi_1 + \varphi_2 + 4\varphi_3 - 6\varphi_0 = 0, \quad (2)$$

где $\varphi_1$, $\varphi_0$, $\varphi_2$ — значения потенциала на линии, параллельной оси симметрии; $\varphi_3$, $\varphi_0$, $\varphi_4$ — значения потенциала на линии, перпендикулярной оси симметрии; $r_0$ — расстояние среднего узла с потенциалом $\varphi_0$ от оси.

Для расчета потенциала поля достаточно сделать одно приближение. Сначала вычисляется потенциал на линии, отстоящей на расстоянии $h$ от оси, по формуле (2). Затем при помощи (1) вычисляются потенциалы на линиях, отстоящих от оси на $2h$, $3h$ и т. д. Эквипотенциальные линии построенного поля дадут необходимую форму электродов.

*Ю. Н. Днестровский*

**290. Теория зависимости распределения плотности тока от сопротивления электродов в электролитическом элементе. Тобиаш, Вейсман** (Theory of the effect of electrode resistance on current density distribution in electrolytic cells. Tobias Charles W., Wijsman Robert), J. Electrochem. Soc., 1953, **100**, № 10, 459—467 (англ.)

Для системы двух плоскопараллельных электродов, погруженных в электролит, вопрос о распределении плотности тока в зависимости от омического сопротивления электродов сводится к решению дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 0$ при краевых условиях

$$I(0, y) = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant d; \ I(l, y) = I_l, \ 0 \leqslant y \leqslant d;$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = -r_0 K (I_l - I) - b_0 K \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad y = 0;$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = +r_d K (I_l - I) + b_d K \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad y = d,$$

где $I$ ($a/см$) есть функция тока, производные которой по $x$ и $y$ равны плотности тока ($a/см^2$) (в частности, производная по $x$ от $I(x, 0)$ (или $I(x, d)$) равна плотности на электроде). Общее решение этой краевой задачи дается в виде

$$\frac{I(x, y)}{I_l} - \frac{x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi \frac{x}{l}\right)\frac{1}{C_n}\left[\lambda_d(\lambda_0 + n^2\pi^2\mu_0)\operatorname{sh} n\pi\frac{y}{l} + \lambda_0(\lambda_d + n^2\pi^2\mu_d)\operatorname{sh} n\pi\frac{d-y}{l} + n\pi\lambda_d \operatorname{ch} n\pi\frac{y}{l} + n\pi\lambda_0 \operatorname{ch} n\pi\frac{d-y}{l}\right]. \quad (1)$$

Здесь $d$, $l$, $\lambda$, $\mu$, $C_n$ и др. — известные физические параметры и их комбинации, зависящие от размеров, формы и материала элемента, а также от величины так называемого концевого эффекта и поляризации. Кроме того, приводятся решения в некоторых частных случаях: 1) распределение тока в случае, если концевой эффект и поляризация имеют место только на одном электроде, 2) распределение тока при отсутствии поляризации и наличии концевого эффекта только на одном электроде.

В случае, если $I$ не зависит от $y$, задача распределения тока сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{1}{l^2}\Phi^2[I_l - I(x)]$$

при граничных условиях

$$I(0) = 0, \qquad I(l) = I_l.$$

В этом случае решение имеет простой вид

$$\frac{I(x)}{I_l} = 1 - \frac{\operatorname{sh}\Phi(1 - x/l)}{\operatorname{sh}\Phi},$$

что при $d/l \ll 1$ ($d$ — расстояние между пластинами, $l$ — длина пластин) является хорошей аппроксимацией решения (1) в общем случае.

Подробно исследуются численные решения в важных частных случаях; приводятся 12 графиков.

*В. К. Саулев*

**291. О распределении температуры в проводе, которое вызвано установившимся электрическим током. Фибер** (Über die Temperaturverteilung in einem von stationärem Strom durchflossenen Draht. Fieber H.), Österr. Ingr.-Arch., 1953, **7**, № 3, 161—168 (нем.)

Рассматривается распределение температуры в цилиндрическом проводе радиуса $R$, которое вызвано установившимся электрическим током. Коэффициент теплопроводности провода предполагается постоянным, а электрическая проводимость провода — линейно зависящей от температуры. Предполагается, что выделение тепла в окружающую среду через поверхность провода и распространение тепла внутри самого провода происходят по законам Ньютона и Фурье, соответственно.

Пользуясь цилиндрическими координатами, автор получил для температуры $T$ провода дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} + bT + C, \quad (1)$$

которое рассматривается при граничных и начальном условиях

$$\left(k_1 T + \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R;t} = k_1 T_1, \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0;t} = 0, \quad (2)$$

$$T\left(r, \frac{L}{2}; t\right) = T_2, \qquad T(r, z; 0) = T_0.$$

После подстановки $\vartheta = T - T_1$ первое из условий (2) становится однородным. Затем применяется преобразование Ганкеля, которое заключается в умножении уравнений (1) и (2) на $rJ_0(\omega_\nu r)$ с последующим интегрированием по $r$ от 0 до $R$. Здесь

$J_0$ — бесселева функция нулевого порядка, а вещественное число $\omega_\nu$ впоследствии подбирается как положительный корень трансцендентного уравнения

$$k_1 R J_0(\Omega_\nu) + \Omega_\nu J_0'(\Omega_\nu) = 0 \text{ при } \Omega_\nu = \omega_\nu R. \quad (3)$$

При этом преобразовании вводится новая неизвестная функция $\tilde{\vartheta}$:

$$\tilde{\vartheta} = \frac{1}{R^2}\int_0^R \vartheta r J_0(\omega_\nu r)\, dr,$$

удовлетворяющая уравнению вида

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial z^2} + \left(b - \frac{a}{R^2}\Omega_\nu^2\right)\tilde{\vartheta} + \frac{d}{\Omega_\nu} J_1(\Omega_\nu) \quad (4)$$

при граничных и начальном условиях

$$\left(\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial z}\right)_{\tilde{\vartheta}(0;\,t)} = 0, \quad \tilde{\vartheta}\left(\frac{L}{2};\,t\right) = \frac{1}{\Omega_\nu}(T_2 - T_1) J_1(\Omega_\nu),$$
$$\tilde{\vartheta}(z;\,0) = \frac{1}{\Omega_\nu}(T_0 - T_1) J_1(\Omega_\nu). \quad (5)$$

После новой подстановки

$$\Theta = \tilde{\vartheta} - \frac{1}{\Omega_\nu}(T_2 - T_1) J_1(\Omega_\nu)$$

второе из граничных условий (5) становится однородным. Затем применяется конечное косинус-преобразование, которое заключается в умножении уравнений (4) и (5) на $\cos \lambda_\mu z$ с последующим интегрированием по $z$ от 0 до $L/2$. Здесь $\lambda_\mu$ подбирается как положительный корень уравнения

$$\cos \Lambda_\mu = 0 \quad \text{при } \Lambda_\mu = \lambda_\mu \cdot L/2. \quad (6)$$

При этом косинус-преобразовании вводится новая неизвестная функция

$$\tilde{\Theta} = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \Theta \cos \lambda_\mu z\, dz,$$

удовлетворяющая уравнению вида

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{dt} = \gamma \tilde{\Theta} + \delta \quad (7)$$

при начальном условии

$$\tilde{\Theta}(0) = \frac{T_0 - T_2}{\Omega_\nu \Lambda_\mu} J_1(\Omega_\nu) \sin \Lambda_\mu. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) при условии (8) получается элементарным путем. Затем, ввиду ортогональности тригонометрических функций, обратное косинус-преобразование получается в виде разложения

$$\Theta = \sum_{\Lambda_\mu} P(\Lambda_\mu)\, \tilde{\Theta} \cos \Lambda_\mu \zeta,$$

где оказывается $P(\Lambda_\mu) = 2$. Обратное преобразование подбирается в виде разложения

$$\vartheta = \sum_{\Omega_\nu} Q(\Omega_\nu)\, \tilde{\vartheta} J_0(\Omega_\nu r),$$

причем применяется ортогональность бесселевых функций.

Решение задачи получается в виде двойного ряда, где суммирование производится по корням уравнений (3) и (6).

Указаны изменения в решении задачи, если третье из граничных условий (2) заменить условием вида

$$\left(k_2 T + \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{T\left(r,\,\frac{L}{2};\,t\right)} = k_2 T_2.$$

При этом уравнение (6) заменяется уравнением

$$\Lambda_\mu \operatorname{tg} \Lambda_\mu - k_2 \frac{L}{2} = 0.$$

В работе отсутствуют указания на сходимость полученных рядов. Имеются неточности: формула (14′) противоречит формулам (14) и (15).

*Н. А. Брагма*

**292. Математическое исследование обмена меченого вещества между жидкостью, текущей в сосуде, и окружающей средой.** Сангрен, Шеппард (A mathematical derivation of the exchange of a labelled substance between a liquid flowing in a vessel and an external compartment. Sangren W. C., Sheppard C. W.), Bull. Math. Biophys., 1953, **15**, № 4, 387—394 (англ.)

Рассматривается течение жидкости с постоянной скоростью $V$ в прямолинейном бесконечно длинном сосуде и исследуется обмен вещества, содержащегося в жидкости, через стенки сосуда. Физиологически, в грубом приближении, такой обмен можно истолковать как прохождение радиоактивных изотопов через стенки внутренних органов, например слизистой оболочки кишечника. В конце работы авторы указывают на недостатки такого толкования.

Исследование приводит к решению системы уравнений

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \rho_1 (F - G), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \rho (G - F) - V\frac{\partial F}{\partial x} \quad (1)$$

при условиях $G(x, 0) = 0$, $F(x, 0) = a(x)$ и $F(x, t)$ ограничено при $x = \pm\infty$. $F(x, t)$ и $G(x, t)$ означают удельные активности обмена в сосуде и вне сосуда, а $\rho$ и $\rho_1$ — постоянные коэффициенты.

Для решения задачи применяется преобразование Лапласа. Изображение $f(x, s)$ функции $F(x, t)$ получено в виде

$$f(x, s) = \frac{1}{V} e^{-cx}\int_0^x a(z)\, e^{cz}\, dz, \quad (2)$$

где

$$c = \frac{1}{V}\left(s + \rho - \frac{\rho\rho_1}{s + \rho_1}\right). \quad (3)$$

Не учитывая того, что $c$ — комплексное, авторы после допущения, что $a(x) = 0$ при $x > L$, применяют к (2) обобщенную теорему о среднем. Затем используются известные формулы обращения. Рассматриваются частные случаи $a(x) = \text{const}$ и $a(x) = M\delta(x)$. Физиологические выводы из полученных решений не даются. В статье имеется много опечаток.

*Э. Я. Риекстыньш*

**293. О точности различных приближений горизонтальных компонент ветра. Хольман, Рёйтер** (Ueber die Genauigkeit verschiedener Approximationen der horizontalen Windkomponenten. Hollmann G., Reuter H.), Tellus, 1953, 5, № 3, 403—412 (нем.; резюме англ.)

Интегрирование основных нелинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{\partial \Phi}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{1}$$

где $f$ — параметр Кориолиса, для горизонтальных компонент ветра $u$, $v$ при известном геопотенциале $\Phi$ удается лишь в отдельных частных случаях. Для преодоления аналитических трудностей интегрирования (1) было предложено два различных метода, а именно:

а) метод линеаризации основных уравнений,

б) метод последовательных приближений скоростей ветра.

В настоящей работе рассматривается и, на основе точного решения гидродинамических уравнений, анализируется точность различных приближений.

В качестве первого простейшего приближения принимаются геострофические уравнения для горизонтальных компонент ветра, т. е.

$$u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y},\qquad v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{2}$$

Метод улучшения этого приближения, развитый Филиппсом, состоит в том, что входящие в эйлеровы ускорения скорости ветра заменяются геострофическими. Сходимость такого ряда приближений достаточно быстрая и уже второе приближение для многочисленных целей дает необходимую точность.

Другое приближение, предложенное Росби (Rossby C. G., J. Marine Res., 1939, 2, 36—55), исходит из предположения, что индивидуальные изменения скорости больше, чем локальные. Вводя в (1) $\eta=\zeta+f$ в качестве абсолютного вихря, уравнения (1) можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\eta v=-\frac{\partial E}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\eta u=-\frac{\partial E}{\partial y},\qquad E=\frac{u^2+v^2}{2}+\Phi, \tag{3}$$

и в первом приближении локальными ускорениями пренебречь. В стационарном случае скорости в правой части (3) могут быть приближенно заменены геострофическими, так что:

$$u_s\approx-\frac{1}{\eta_g}\frac{\partial E_g}{\partial y},\qquad v_s\approx\frac{1}{\eta}\frac{\partial E_g}{\partial x} \tag{4}$$

Дальнейшее приближение дал Хольман. Оно рассматривает бездивергенционное движение, которое в стационарном случае имеет вид

$$u_{Ds}=u_g-\frac{2K}{f}\frac{\partial \alpha}{\partial x},\qquad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u},$$

где

$$v_{Ds}=v_g-\frac{2K}{f}\frac{\partial \alpha}{\partial y},\qquad K=\frac{u^2+v^2}{2}. \tag{5}$$

Точность геострофического первого приближения Филиппса и стационарного приближений исследована для двух простых движений: твердого вращения и деформации ($v=\lambda y$; $u=\lambda x$).

В первом случае наилучшие результаты дает стационарное приближение. В деформационном поле точность приближения зависит от параметра $\lambda$. При больших $\lambda$ стационарное приближение менее точно и полностью вырождается, если $\lambda=\pm f/\sqrt{2}$. В целом оказывается, что в деформационном поле наилучшим является приближение Филиппса.

Исследование различных приближений на основе точного решения нелинейного уравнения для бездивергенционного потока (Craig R., J. Meteorol., 1945, 2, 173—178; Neamtan S., J. Meteorol., 1946, 3, 53—56) для приближенных распределений вихря дает следующее:

геострофический вихрь оказывается завышенным в циклональной области и заниженным в антициклональной; стационарный вихрь дает приблизительно правильное распределение в циклональной области, однако значительно завышен в антициклональной; первое приближение Филиппса занижено по абсолютным значениям в циклональной и антициклональной областях, но симметричнее, чем оба вышеуказанных приближения. *А. А. Пивоваров*

**294. Гамильтонова механика поля. Гуд** (Hamiltonian mechanics of fields. Good R. H., Jr.), Phys. Rev., 1954, 93, № 1, 239—243 (англ.)

Следуя Борну и Вейлю, автор рассматривает временную координату наравне с пространственными координатами и представляет четыре пространственно-временные производные от компонент поля как четыре независимые скорости. Как отмечает автор, преимущество этой точки зрения состоит в том, что в этом случае уравнения могут быть записаны в ковариантной форме.

Имея функцию Лагранжа $L(q_c,\ dq_i/dx_\alpha, x_\beta)$, постулируют вариационный принцип $\delta\int L d^4x=0$, который приводит к обычным уравнениям движения

$$\frac{d}{dx_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\,(dq_i/dx_\alpha)}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \tag{1}$$

с той разницей, что для каждой амплитуды поля определяется четыре импульса

$$P_{i\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\,(dq_i\,dx_\alpha)}. \tag{2}$$

Задача в механике поля состоит в том, чтобы найти функции от пространства и времени $q_i(x_\alpha)$.

Уравнения Гамильтона находятся из уравнений Лагранжа (1) и определяющих импульсы равенств (2). Предполагается, что равенства (2) могут быть разрешены относительно скоростей, которые будут представлены как функции от координат и импульсов (этого нельзя сделать с уравнениями поля первого порядка).

Строится функция Гамильтона.

$$H(q,p,x)=p_{j\alpha}dq_j/dx_\beta-L$$

и уравнения движения записываются в таком виде

$$dq_i/dx_\alpha = \partial H/\partial p_{i\alpha},\ -dp_{i\alpha}/dx_\alpha = dH/\partial q_i.$$

Эти уравнения сводятся к каноническим уравнениям механики, когда индексы $\alpha$ принимают лишь одно значение. Исходя из вариационного принципа, автор рассматривает канонические преобразования, которые определяются из формул

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_{i\beta}'} = \delta_{\alpha\beta} q_i',\quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial qi} = p_{i\alpha},\quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\alpha} = H' - H,$$

где $F_\alpha(q, p', x)$ зависит линейно от новых, но не от старых импульсов. В отличие от обычной механики, новые координаты могут зависеть лишь от старых координат и от $x_\alpha$. Бесконечно малое каноническое преобразование с малым параметром $\varepsilon$ задается функцией

$$F_\alpha = q_i p_{i\alpha}' + \varepsilon G_\alpha(q, p', x) =$$
$$= q_i p_{i\alpha}' + \varepsilon[s(q, x) p_{i\alpha}' + g_\alpha(q, x)].$$

Определяя скобки Лагранжа

$$\{u_A, u_B\}_\alpha^{p,q} = \frac{\partial q_i}{\partial u_A}\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_B} - \frac{\partial q_i}{\partial u_B}\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_A},$$

где $u_\Gamma(q, p, x)$ — независимые функции координат и импульсов, $\Gamma = 1, 2, \ldots, 5n$, автор показывает, что достаточным и необходимым признаком канонического преобразования является выполнение равенств

$$\{p_{k\gamma}', p_{j\beta}'\}_\alpha^{q,p} = \{q_k', p_j'\} = 0,$$
$$\{q_k', p_{j\beta}'\}_\alpha^{q,p} = \delta_{jk}\delta_{\alpha\beta}$$

и что численное значение скобок Лагранжа не зависит от канонической системы переменных, после чего индексы $q$, $p$ при этих скобках опускаются.

Затем автор определяет скобки Пуассона

$$(u_A, u_B)_\alpha^{qp} = \frac{\partial u_A}{\partial q_i}\frac{\partial u_B}{\partial p_{i\alpha}} - \frac{1}{4}\frac{\partial u_B}{\partial q_i}\frac{\partial u_A}{\partial p_{i\alpha}}$$

и показывает, что произведение

$$\{u_A, u_B\}(u_A, u_\Gamma)_\alpha^{q,p} = \delta_{B\Gamma}.$$

Скобки Пуассона вообще не являются каноническими инвариантами и оказываются инвариантами в частных случаях, когда одна из функций $u_A = v$ не зависит от импульсов или когда $u_A = w_\alpha$ зависит линейно только от одного импульса $p_{i\alpha}$. Уравнения Гамильтона через скобки Пуассона записываются в таком виде:

$$dq_i/dx_\alpha = (q_i, H)_\alpha,\ dp_{i\alpha}/dx_\alpha = (p_{i\alpha}, H)_\alpha.$$

Функцию $G_{\alpha\beta}\cdots(q, p, x)$ автор называет интегралом движения, если $(d/dx_\alpha) G_{\alpha\beta}\cdots(q(x), p(x), x) = 0$, и устанавливает, что если при бесконечно малом контактном преобразовании функциональная зависимость функции Гамильтона от ее аргументов остается неизменной, то порождающий вектор преобразования $G_\alpha$ является интегралом движения.

Обратная теорема механики о том что каждый интеграл движения дает преобразование, которое оставляет форму функции Гамильтона неизменной, здесь не имеет места, так как только векторы, дающие точечные преобразования, могут давать в механике поля канонические преобразования.

*А. К. Никитин*

295. **О вариационных принципах квантовой механики. Ридо** (Sur les principes variationnels en Mécanique quantique. Rideau Guy), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1646—1648 (франц.)

Обобщаются вариационные принципы, данные ранее другими авторами. Для пары уравнений

$$L\Psi = \varphi_1,\ L^*\Phi = \varphi_2 \qquad (1)$$

выражение $\int \Psi\varphi_2 d\tau$ равно стационарному значению функционала:

$$I = \int \Phi^*\varphi_1 d\tau - \int \Phi^* L\Psi d\tau + \int \Psi^*\varphi_2 d\tau,$$

в котором $\Psi$ и $\Phi$ — функции сравнения из определенного класса. Обозначим члены функционала $I$ через $a$, $b$ и $c$ соответственно: $I = a - b + c$. Если $\Phi$ и $\Psi$ удовлетворяют (1), то $a = b = c$ и $I = a$. Исходя из этого строится обобщение.

Пусть $F(a, b, c)$ — аналитическая функция своих аргументов, $F(a, a, a) = a$ и имеет место вариационный принцип:

$$[\delta F(a, b, c)]_{a=b=c} = 0.$$

Пусть величины $a$, $b$ и $c$ попережнему связаны соотношением $\delta I = \delta a - \delta b + \delta c = 0$, отсюда следует:

$$\frac{\partial F(a, a, a)}{\partial a} = -\frac{\partial F(a, a, a)}{\partial b} = \frac{\partial F(a, a, a)}{\partial c} = 1. \qquad (2)$$

Автор рассматривает вопрос о том, каков наиболее общий вид $F$. Из (2) следует целый ряд уравнений для коэффициентов разложения функции $F$ в степенной ряд, однако отсюда они еще не определяются полностью. Автор показывает, что, если потребовать независимости функции $F$ от нормировки функций сравнения, то этим коэффициенты ее разложения полностью определятся.

*Ю. Н. Днестровский*

296. **Принцип Гюйгенса и дифракция электрона в теории Дирака. Дюран** (Le principe de Huygens et la diffraction de l'électron en théorie de Dirac. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 13, 1337—1339 (франц.)

Для произвольной функции $\Psi_n(x_1, x_2, x_3)$ справедливо известное тождество

$$\left\{\begin{matrix} 4\pi\Psi_n(x_1, x_2, x_3) \\ \text{или } 0 \end{matrix}\right\} =$$
$$= -(\partial_u\partial^u + k^2 - k_0^2)\int \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{r}\Psi_n(x_1', x_2', x_3')dv'. \qquad (1)$$

Здесь

$$dv' = dx_1' dx_2' dx_3',\qquad \partial_u\partial^u = \sum_{u=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_u^2}$$

Введением функций $\Phi_n$, определяемых формулой

$$4\pi\Phi_n = (ik\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u) \times$$

$$\times \int \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{r} \Psi_n(x_1', x_2', x_3')\,dv', \qquad (2)$$

тождество (1) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \Psi_n \\ \text{или } 0 \end{pmatrix} = \alpha_u\partial^u + ik_0\alpha_4 + ik\alpha_0)\,\Phi_n, \qquad (3)$$

где $\alpha_u$ $(u = 1, 2, 3, 4)$ — матрицы Дирака, $\alpha_0$ — единичная матрица четвертого порядка.

Если действовать операторами под знаком интеграла в (2), преобразовать объемный интеграл в поверхностный и учесть, что $\Psi_n$ удовлетворяет уравнению Дирака для свободного электрона, то выражение для $\Phi_n$ можно привести к виду

$$4\pi\Phi_n = \int_S \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{r} (\alpha_u n^u)\Psi_n\,dS'. \qquad (4)$$

Результат (3) в соединении с (4) и является формулировкой принципа Гюйгенса в теории Дирака. *П. П. Бирюлин*

297. **Ковариантный интеграл Фурье и решение задачи Коши дла свободных частиц спина $^1/_2$ и 1. Боргар** (Intégrales de Fourier covariantes et résolution du problème de Cauchy pour les particules libres de spin $^1/_2$ et 1. Beauregard Olivier Costa de), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 23, 1495—1497 (франц.)

Автор ищет релятивистски инвариантное решение уравнений Дирака $(a_\lambda = \gamma_\lambda)$ и Кеммера $(a_\lambda = \beta_\lambda)$ для свободных частиц

$$(a_\lambda\partial^\lambda + k_0)\,\psi(x) = 0,$$

$$(a_\lambda k^\lambda - ik_0)\,\varphi(k) = 0, \quad k_\lambda k^\lambda = -k_0^2,$$

принимающее на некоторой гиперповерхности пространственного типа $\mathcal{E}$ заданные значения $\psi(x')$. Показывается, что решение сформулированной таким образом задачи Коши может быть представлено в виде

$$\psi(x) = \iiint_{\mathcal{E}} S^\lambda(x - x')\,\psi(x')\,\delta u_\lambda(x').$$

Здесь

$$S^\lambda(x) = D(x)(ik^\lambda + \partial^\lambda),$$

где $D(x)$ — хорошо известная функция Штукельберга:

$$D(x) = \frac{i}{2k_0(2\pi)^2} \iiint_{\mathcal{H}} \varepsilon(k) e^{ik^\rho x_\rho}\,\delta\nu,$$

$$\varepsilon(k) = \frac{k_4/i}{|k_4/i|}.$$

*Д. П. Костомаров*

298. **К задаче о взаимодействии плоских волн конечной амплитуды при запаздывании образования скачка, вызванного волной разрежения. Стоккер** (в подлиннике Стокер П.), Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. периодич. лит-ры, 1953, № 1, 60—71

Перевод статьи Стоккера. См. РЖМех, 1954, 2443.

299. **Воздушный поток над нагретым островом в устойчиво-стратифицированной атмосфере. Часть II. Стерн, Малкус** (The flow of a stable atmosphere over a heated island. Part II. Stern Melvin E., Malkus Joanne Starr), J. Meteorol., 1953, **10**, № 2, 105—120 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 2622.

300. **Распространение упругих волн в цилиндрической полости, содержащей жидкость. Био М.**, Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. периодич. лит-ры, 1953, № 3, 142—155 Перевод статьи Био. См. РЖМех, 1954, 2574.

301. **К теории собственных колебаний изотропной упругой среды. Леднегг, Урбан** (Zur Theorie der Eigenschwingungen isotroper elastischer Medien. Lednegg E., Urban P.) Acta phys. austriaca, 1953, **7**, № 4, 420—435 (нем.)

См. РЖМех, 1954, 2681.

302. **Функция Грина для упругих пластинок. Шульц-Грунов** (Grecnsche Funktionen fur elastische Platten. Schultz-Grunow F.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 7, 227—237 (нем.)

См. РЖМех, 1954, 1714.

303. **Узловые линии колеблющейся пластинки. Даффин** (Nodal lines of a vibrating plate. Duffin R. J.), J. Math. and Phys., 1953, **31**, № 4, 294—299 (англ.).

См. РЖМех, 1954, 1738.

304. **Конический поток без осевой симметрии. Ферри** (Conical flow without axial symmetry, Ferri Antonio), Aerotecnica, 1955, **33**, № 1, 69—71 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 1541.

305 К. **Техника регулирования. Шенфельд** (Regelungstechnik. Ausgewählte Kapitel. Schönfeld Herbert, Schriftenreihe des Verlages Technik, Band 92, VEB Verlag Technik, Berlin, 1953, DM 7.20) (нем.)

Книга содержит конспективное изложение основ теории автоматического регулирования. В первой главе на простейших примерах схем автоматического регулирования излагаются основы техники регулирования, постановка задачи об исследовании устойчивости процесса регулирования в линейном приближении и критерии устойчивости Рауса, Гурвица, а также критерии, основанные на непосредственном использовании принципа аргумента и связанные с построением различных годографов (критерий Найквиста, Михайлова и т. д.).

Вторая глава посвящена использованию теории преобразований Лапласа для исследования протекания процесса регулирования в линейном приближе

нии. Вводится понятие о передаточной функции системы регулирования. Выводятся интегральные уравнения процесса регулирования.

В качестве третьей главы, в которой дается использование преобразования Фурье для анализа процесса регулирования, помещен перевод одной статьи В. В. Солодовникова (Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1949, № 4, 473—491). *М. А. Айзерман*

См. также: 3, 311, 342, 344, 426—429

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**306. Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений. Бицадзе А. В.**, Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 595—597

Рассматривается система сингулярных уравнений

$$A\varphi(P_0)+\frac{B}{2\pi}\iint_S M(P_0,Q)\,\varphi(Q)\,d\omega_Q=\mathbf{f}(P_0), \quad (1)$$

где $A$, $B$ — постоянные квадратные матрицы четвертого порядка, $S$ — поверхность в трехмерном пространстве, удовлетворяющая условию Ляпунова, $P_0$, $Q$ — точки $S$, ядро $M(P_0, Q)$ имеет некоторый специальный вид с особенностью в точке $Q=P_0$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, наконец, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ — искомый и $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ — заданный векторы, удовлетворяющие на $S$ условию Гёльдера.

Предполагая, что $\det(A\pm B)\neq 0$ и что матрица $(A+B)^{-1}(A-B)$ имеет специальный вид, автор выводит формулу обращения для системы (1) и доказывает существование и единственность решения. В основе исследования лежит обобщенное понятие интеграла типа Коши

$$\Phi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S M(P,Q)\,\varphi(Q)d\omega_Q; \quad (2)$$

для последнего устанавливаются формулы, аналогичные формулам Ю. В. Сохоцкого, и тогда все сводится к задаче, аналогичной известной краевой задаче линейного сопряжения для функций одного переменного. Полученная формула обращения с небольшими изменениями сохраняется и для трехмерных векторов $\varphi$ и $\mathbf{f}$. *Б. В. Шабат*

**307. Об интегрировании методом последовательных приближений нормальных систем рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений Жерме** (Sur l'intégration, par la méthode des approximations successives des systèmes normaux d'équations intégro-différentielles récurrentes. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, 131—138 (франц.)

Эта заметка является распространением предыдущих работ автора (Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1949, **18**, 250—258; Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1952, сер. 1, **66**, 125—130; РЖМат, 1953, 772) на системы рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений. Этот вопрос впервые изучался Брювье (Bruwier L., Mém. Soc. roy. sci. Liège, 1932, **17**, № 22, 43). *I. A. Barnett*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 232.

**308 Д. Некоторые вопросы теории линейных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. Маркова В. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. гос. пед. ин-т, Пенза, 1953

### ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**309. Осцилляционные свойства колебаний сжатого стержня. Меляховецкий А. С.** Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 4, 461—464

Рассматриваются поперечные колебания прямолинейного упругого стержня, сжатого осевой нагрузкой $Pf(x)$, где $P$ — параметр, а $f(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная положительная функция. Для трех типов таких стержней, а именно, для консольного стержня, для стержня, жестко закрепленного на концах, и стержня, свободно опертого на одном конце и жестко закрепленного на другом, устанавливается, что при всех значениях параметра $P$, меньших некоторого $P_1$, ядро интегрального уравнения поперечных колебаний является осцилляционным. Таким образом, во всех перечисленных случаях собственные колебания обладают следующими свойствами: 1) все частоты являются простыми; 2) $j$-й обертон имеет точно $j$ узлов; 3) основной тон узлов не имеет; 4) узлы двух последовательных тонов перемежаются; 5) в колебании, получающемся путем наложения собственных колебаний с частотами $p_k<p_l<\ldots<p_m$, число перемен знака прогиба с течением времени колеблется в пределах от $k$ до $m$. При установлении этих результатов используются понятия и методы, развитые в книге Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна (Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950). *М. Г. Крейн*

**310. Второй международный реологический конгресс.** Оксфорд, 26—31 июля 1953 г. (Second international congress on rheology. Oxford, July 26—31, 1953), Petroleum, 1953, **16**, № 10, 292—294 (англ.)

Отчет о названном конгрессе. Кратко излагается содержание вступительной речи президента Дж. Тейлора, а также некоторых из сделанных докладов, так, например, доклада Вольтерра, который рассмотрел действие ударных нагрузок на изделия из пластмасс и резиноподобных материалов при помощи уравнений теории линейной наследственности с ядрами, представляющими сумму экспоненциальных функций, и предложил методику определения констант путем динамических испытаний. В докладе Кольского сделан вывод о том, что при оценке поглощающих свойств резиновых демпферов в условиях больших скоростей нагружения решающую роль играет объемный модуль упругости. Гёзе и Цон-Цзе дали реологическое описание свойств глины.

*Ю. Н. Работнов*

**311. Метод расчета входного воздействия передающей системы. Лос** (Způsob výpočtu vstupní veličiny přenášecího systému. Loos Horst R.), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 11, 458—464 (чеш., резюме русск., нем., англ., франц.)

Пусть координаты $x$ и $y$ связаны обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, описывающим процессы в какой-либо передающей системе (системе автоматического регулирования, в следящей системе, в усилителе и т. д.). Уравнение это неизвестно, но известна функция $y = \Phi(t)$, удовлетворяющая уравнению, когда $x$ — функция Дирака (импульсная функция), а также функция $y(t)$, удовлетворяющая этому же уравнению, в случае, когда $x(t)$ — некоторая иная функция. Требуется, зная функции $\Phi(t)$ и $y(t)$, построить функцию $x(t)$. Статья содержит постановку этой задачи и один из возможных методов ее решения, основанный на использовании интегрального уравнения

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau,$$

которое получается при применении к рассматриваемой задаче теории преобразований Фурье. Предложенный метод демонстрируется на примере простой электронной схемы. *М. А. Айзерман*

**312. Интегральные уравнения Милна для совершенно рассеивающей атмосферы.** Бувье (Les équations intégrales de Milne pour une atmosphère parfaitement diffusante. Bouvier Pierre B.), Arch. sciences., 1953, 6, № 5, 262—268 (франц.)

Рассматривается случай неизотропного рассеяния, характеризуемого фазовой функцией $p(\cos\nu)$. В частном случае $p = 1 + \cos^2\nu$ автор вместо известных уравнений Милна получает уравнения

$$J(\tau) = \frac{3}{8}\,\Lambda_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{32}\,X_\tau\{3K - J\},$$

$$F = \frac{3}{8}\,\Phi_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{8}\,Y_\tau\{3K - J\},$$

$$K(\tau) = \frac{3}{32}\,X_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{32}\,Z_\tau\{3K - J\}.$$

Здесь $J$ и $K$ — неизвестные; величина $F$ предполагается постоянной. Операторы, входящие в уравнения, имеют вид

$$\Lambda_\tau\{f\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,E_1(|\tau - t|)\,dt,$$

$$\Phi_\tau\{f\} = 2\int_\tau^\infty f(t)\,E_2(t-\tau)\,dt - 2\int_0^\tau f(t)\,E_2(\tau - t)\,dt,$$

$$X_\tau\{f\} = 2\int_0^\infty f(t)\,E_3(|t-\tau|)\,dt,$$

$$Y_\tau\{f\} = 2\int_\tau^\infty f(t)\,E_4(t-\tau)\,dt - 2\int_0^\tau f(t)\,E_4(\tau - t)\,dt.$$

$$Z_\tau\{f\} = 2\int_0^\infty f(t)\,E_5(|t-\tau|)\,dt.$$

Наконец,

$$E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt}\,t^{-n}\,dt$$

Если в уравнениях (1) положить $K = J/3$, то они переходят в уравнения Милна. *С. Г. Михлин*

**313 Д. Некоторые контактные задачи плоской теории упругости анизотропных сред.** Грилицкий Д. В. Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1954

См. также: 179, 217, 224, 238, 239, 283, 341, 348

## АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

**314. Интегралы и суммы при делении на равные части.** Мордухов (Integrals and equal division sums. Morduchow Morris), Math. Mag., 1953, **27**, № 2, 65—68 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f$ — функция на $[0,2\pi]$ со сходящимся к ней на $[0,2\pi]$ рядом Фурье $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \exp(i\nu x)$. (Автор излишне предполагает сходимость равномерной. *Прим. реф.*) Тогда для выполнения равенства

$$\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{2\pi}{m}j\right)\frac{2\pi}{m} = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

при некотором натуральном $m$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{0\neq\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\nu m} = 0,$$

В заключение приводятся замечания к формуле Эйлера-Маклорена. *А. А. Конюшков*

**315. Аннулирующие коэффициенты.** Джарден (Nullifying coefficients. Jarden Dov), Scripta Math., 1953, **19**, № 4, 239—241 (англ.)

В биномиальных коэффициентах $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k-1)}{1\,2\ldots k}$ каждый сомножитель $n$, $n-1$, ..., $n-k+1$, 1, 2, ..., $k$ заменяется соответствующим числом Фибоначчи $a_\nu$. Полученные коэффициенты автор обозначает $\binom{n}{k}_a$. Отмечаются некоторые свойства этих коэффициентов, в частности, с их помощью записываются рекуррентные соотношения между степенями последовательных чисел Фибоначчи. *Ф. В. Широков*

**316 К. Высшая математика.** Шмид, Ворлитцш, Шёнерштедт (Höhere Mathematik

für Bergbau, Hüttenwesen und verwandte Gebiete. 2. Lehrbrief. Schmid Wilhelm, Worlitzsch Rudolf, Shönerstedt Johannes, 2/72 S., 40 Abb., VEB Verlag Technik, Berlin, 1953) (нем.)

**317 К. Курс математики и хозяйственных вычислений. Хмелев Н. Н.** (Для заочного обучения колхоз. счетоводов), изд. 6-е, 176 стр., Глав. упр. подготовки кадров М-ва сельского хоз. и заготовок СССР. Всесоюз. заоч. учебные курсы ВЗУК, М., 1953 (библ.)

**318 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Банах** (Rachunek różniczkowy i całkowy. Banach S, T. 1, 2, Wyd. 2., Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Rb. 5, 4). Biul. eksportowy, 1954, № 1, 18 (библ.)

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**319. О сходимости $p$-ряда. Фостер, Кламкин** (On the convergence of the $p$-series. Foster R. M., Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 625—626 (англ.)

Рассматриваются условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p_n}$ для некоторых последовательностей $p_n$.

*В. В. Немыцкий*

**320. Опечатки к «Суммированию медленно сходящихся рядов». Гумовский** (Erratum: Summation of slowly converging series. Gumowski Igor), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 10, 1330 (англ.)

Исправление ошибки в коэффициентах $b_m$.(РЖМат, 1954, 5639).

**321. Замечания к «Суммированию медленно сходящихся рядов» Браун** (Comments on summation of slowly converging series. Braun Julian H.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1954, **25**, № 1, 132 (англ.)

Показывается, как формула, полученная Гумовским (см. РЖМат, 1954, 5639), может быть выведена из формулы Эйлера. *Ф. В. Широков*

**322. Дальнейшие замечания к «Суммированию медленно сходящихся рядов». Гумовский** (Further comments on summation of slowly converging series. Gumowski Igor). J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 1, 133 (англ.)

Полемика с Брауном (см. реф. 321).

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**323. Некоторые интегральные соотношения между функциями Бесселя первого и второго рода. Джулиано** (Alcune relazioni integrali fra funzioni di Bessel di prima e di seconda specie. Giuliano Landolino), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 115 (итал.)

**324. Неравенство, содержащее функции Бесселя, аргумент которых почти равен их порядку. Сигел** (An inequality involving Bessel functions of argument nearly equal to their order. Siegel Keeve M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 858—859 (англ.)

В работе устанавливается неравенство

$$J_\nu(\nu x) < e^{-\nu\varphi(x)},$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя, $0 < x \leqslant 1$, $\nu > 0$,

$$\varphi(x) = \ln\{[1+(1-x)^2]^{1/2}/x\} - (1-x^2)^{1/2},$$

которое при $x$, близких к единице, дает лучшую оценку для рассматриваемой функции, чем известное неравенство Ватсона

$$J_\nu(\nu x) \leqslant e^{-\nu\varphi(x)}(1-x^2)^{-1/4}(2\pi\nu)^{-1/2}$$

(Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, гл. 8, 282). Автор замечает, что неравенства аналогичного вида могут быть получены также для $\nu x > 1$ и для других цилиндрических функций. *Н. Н. Лебедев*

**325. Произведение двух полиномов Лежандра. Дугол** (The product of two Legendre polynomials. Dougall John), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 121—125 (англ.)

Работа содержит новый вывод коэффициентов разложения в ряд по полиномам Лежандра произведения двух полиномов Лежандра. Остроумное доказательство автора основано на повторном применении оператора Лапласа к однородным гармоническим полиномам. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 3, 218.

**326. О некоторых неравенствах, относящихся к ультрасферическим многочленам Якоби. Мерли** (Sopra alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici di Jacobi. Merli Luigi), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 151—155 (итал.)

Пусть

$$F_n^{(\lambda)}(x) = K_n^{(\lambda)}(1-x^2)^{-\lambda+1/2}\frac{d^n(1-x^2)^{\lambda+n-1/2}}{dx^n}$$

— ультрасферический многочлен, нормированный так, что $F_n^{(\lambda)}(1) = 1$.

Если $1 < \lambda < 2$ и $k \leqslant n(n+\lambda+1)/[n(n+\lambda+1)+\lambda]$, то при всех вещественных $x$ оказывается

$$[F_n^{(\lambda)}(x)]^2 > kF_{n-1}^{(\lambda)}(x)F_{n+1}^{(\lambda)}(x). \qquad (1)$$

Примечание референта. Не оговорено, что $k > 0$, без чего (1) нарушается около корней $F_n^{(\lambda)}(x)$. *И. П. Натансон*

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**327. Замечание об одном классе экспоненциальных функций в операционном исчислении. Влодарский** (Une remarque sur une classe de fonctions exponentielles du calcul opérationnel. Włodarski L.), Studia math., 1953, **13**, 188—189 (франц.)

Автор доказывает, что функция

$$f(t, \lambda; \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp(zt - z^\alpha\lambda)\,dz$$

(преобразование Лапласа которой имеет вид $\exp(-s^{\alpha}\lambda)$) неотрицательна для $0<\alpha<1$ и $\lambda, t>0$. Доказательство основано на формуле Поста (F. L Post)

$$f(t)=\lim_{k\to\infty}[(-1)^k/k!]\,(k/t)^{k+1}\,F^{(k)}(k/t),$$

где $F$ является преобразованием Лапласа функции $f$.

Результат автора легко усилить до строгого неравенства $f(t,\lambda;\alpha)>0$, учитывая, что

$$f(t,\lambda;\alpha)=\int_0^t f(t-\tau,\lambda/2;\alpha)\,f(\tau,\lambda/2;\alpha)\,d\tau.$$

*J. Mikusiński*

328. **Несколько замечаний о времени, рассматриваемом как комплексное переменное.** Черри (Quelques remarques sur le temps considéré comme variable complexe. Cherry E. Colin). Onde électr., 1954, 34, № 322, 7—13, резюме 3—4 (франц.)

Формулы обращения Фурье

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega,\quad g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

преобразуют друг в друга функцию вещественного переменного — времени $t$ и спектральную функцию вещественного переменного — частоты $\omega$. Замена в этих формулах $\omega i$ комплексной переменной $\lambda=c+\omega i$ ведет к обычным формулам преобразования Лапласа и его обращения, применяемым в математической физике. Симметричная замена $ti$ комплексной переменной $\gamma=c+ti$ дает следующую пару взаимно обратных преобразований:

$$\Psi(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\,e^{-\gamma\omega}\,d\omega,$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\Psi(\gamma)\,e^{\gamma\omega}d\gamma,$$

которые также по существу являются преобразованием Лапласа и его обращением. Если $\Psi(\gamma)=h(\tau,t)+if(\tau,t)$, $h(0,t)=h(t)$, $f(0,t)=f(t)$, то

$$f(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(\nu)\,\frac{d\nu}{\nu-t},$$

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\nu)\,\frac{d\nu}{\nu-t}.$$

В заключение приводится в одном частном случае физическое толкование теоремы запаздывания операционного исчисления с комплексным временем запаздывания.

Примечание референта. Комплексное время запаздывания встречается также в операторных решениях эллиптических уравнений в неограниченных областях. *В. И. Левин*

329. **Отношения сигнала к шуму в полосных ограничителях.** Давенпорт (Signal-to-noise ratios in band-pass limiters, Davenport W. B., Jr.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 6, 720—727 (англ.)

Рассмотрен эффект передачи амплитудно модулированного синусоидального электрического процесса с шумом, имеющим спектр частот, симметрично расположенный вблизи несущей частоты процесса. Предполагается, что передающее устройство описывается однозначной неубывающей печетной функцией вида $y(t)=g[x(t)]$, выражающей зависимость между входным сигналом $x(t)$ и выходным сигналом $y(t)$, и что за этим устройством следует полосный фильтр, задерживающий гармоники несущей частоты. Пользуясь интегралом Фурье и преобразованием Лапласа, автор получает выражения для мощностей выходного сигнала и выходного шума.

Конкретнее рассмотрено действие устройства, работающего по закону $g(x)=ax^{1/n}$ (при $x\geqslant 0$), в особенности случаи $n=\infty$ и $n=2$ (при $n=1$ получается обычный усилитель). Установлено, что отношение мощностей выходного сигнала к выходному шуму в сущности пропорционально отношению мощностей входного сигнала к входному шуму. *Н. А. Брагма*

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

330. **О применении операционного исчисления к статике сооружений.** Дробот (Uwagi o zastosowaniu rachunku operatorów do statyki konstrukcji, Drobot Stefan), Arch. mech. stosowanej, 1954, 6, № 1, 93—100 (польск.; резюме русск., англ.)

Приводятся краткие сведения из операционного исчисления. Выводится операционное уравнение прогиба балки и показываются его применения на нескольких механических примерах. *Ф. В. Широков*

331. **Методы приближений в функциональном исчислении.** Броден (Méthodes d'approximation en calcul fonctionnel. Brodin Jean), Ann. telecommuns, 1954, 9, № 1, 1—8 (франц.)

Оператор $f$, сопоставляющий входному сигналу $x(\tau)$ выходной сигнал $y(t)$ (имеется в виду некоторая электрическая схема, совершающая преобразование сигналов, протекающих во времени), предполагается линейным и удовлетворяющим еще нескольким ограничениям. Оператор $f$ определяется значениями $y(t)=f_0^t$, которые он принимает на сигналах $Y(t-\theta)$, где

$$Y(\lambda)=0 \text{ при } \lambda<0,\ =1 \text{ при } \lambda>0,\ Y(0)=1/2.$$

Далее вводятся обычные понятия — умножение операторов, ряды операторов, аналитические функции от операторов. Даются примеры приложений. *М. К. Гавурин*

332. **Рассеяние света смесью диэлектрических шаров.** Эльзассер (Lichtstreuung an einem Gemisch von dielektrischen Kugeln. Elsässer Hans), Z. Astrophys., 1954. 34, № 1, 50—67 (нем.)

Формулы Ми для интенсивностей $J_1(x, \vartheta)$ и $J_2(x, \vartheta)$ рассеянного шаром радиуса $a$ ($x = 2\pi a/\lambda$) излучения:

$$J_1(x, \vartheta) = (\lambda^2/4\pi^2 r^2) \times$$
$$\times \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \{a_\nu \pi_\nu(\cos\vartheta) + b_\nu \tau_\nu(\cos\vartheta)\} \right|^2,$$

$$J_2(x, \vartheta) = (\lambda^2/4\pi^2 r^2) \times$$
$$\times \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \{a_\nu \tau_\nu(\cos\vartheta) + b_\nu \pi_\nu(\cos\vartheta)\} \right|^2,$$

где

$$\pi_\nu(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sin\vartheta} P_\nu^{(1)}(\cos\vartheta), \quad \tau_\nu(\cos\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} P_\nu^{(1)}(\cos\vartheta),$$

$$a_\nu = \frac{n\psi_\nu(nx)\,\psi_\nu'(x) - \psi_\nu'(nx)\,\psi_\nu(x)}{n\psi_\nu(nx)\,\zeta_\nu'(x) - \psi_\nu'(nx)\,\zeta_\nu(x)},$$

$$b_\nu = \frac{n\psi_\nu'(nx)\,\psi_\nu(x) - \psi_\nu(nx)\,\psi_\nu'(x)}{n\psi_\nu'(nx)\,\zeta_\nu(x) - \psi_\nu(nx)\,\zeta_\nu'(x)}$$

($n$ — коэффициент преломления) и

$$\psi_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2}\, I_{\nu+1/2}(x),$$
$$\chi_\nu(x) = (-1)^\nu \sqrt{\pi x/2}\, I_{-\nu-1/2}(x),$$
$$\zeta_\nu(x) = \psi_\nu(x) + i\chi_\nu(x),$$

используются для подсчета интенсивностей излучения, рассеянного большим числом шаров разных радиусов, подчиненных закону распределения $w(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, на расстоянии $r$, значительно превосходящем как радиусы шаров, так и наибольшее расстояние между ними. В этих условиях оказывается, что при достаточно больших значениях $x_1/x_0$ с точностью до малых величин (порядок которых не приводится)

$$J(\vartheta) = \int_{x_0}^{x_1} J_1(x, \vartheta)\, w(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} J_2(x, \vartheta)\, w(x)\, dx,$$

где интенсивности $J_1(x, \vartheta)$, $J_2(x, \vartheta)$ могут быть заменены выражением

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left[\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{x} \frac{\nu+1/2}{\sin\vartheta}\cos^2\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right]\right].$$

Подробно рассматривается физическое толкование результата.

Примечание референта. В окончательных формулах статьи есть несоответствия. Во всяком случае неверна приведенная на стр. 65 асимптотическая формула

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{x} \frac{\nu+1/2}{\sin\vartheta}\cos^2\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{x^2}{4},$$

в правой части которой должно быть $\dfrac{x^2}{2\pi\sin\vartheta}$.

*В. И. Левин*

**333. К практическому расчету коэффициента двукратно сцепленного рассеяния. Крон, Бопп** (Beitrag sur praktischen Berechnung des Koeffizienten der doppeltverketteten Streung. Kron A.-W., Bopp K.), Arch. Elektrotechnik, 1953, **41**, № 3, 136—142 (нем.)

В расчетах коэффициента рассеяния электрических машин встречаются ряды вида

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left(\frac{f_\lambda}{\lambda}\right)^2, \qquad (1)$$

где $f_\lambda$ означают некоторые вещественные коэффициенты, значения которых периодически повторяются с периодом $T$ и, кроме того, удовлетворяют условию

$$f_{\lambda+Tk}^2 = f_{T-\lambda+Tk}^2 \qquad (2)$$
$$(k = 0, 1, \ldots).$$

Для практического вычисления суммы медленно сходящегося ряда (1) отдельно суммируются члены, соответствующие одинаковым значениям коффициентов $f_\lambda^2$.

Суммирование ряда (1) автор сводит к вычислению конечной суммы:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{f_\lambda}{\lambda}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\pi}{T}\right)^2\left[\frac{f_1^2}{\sin^2(\pi/T)} + \frac{f_2^2}{\sin^2(2\pi/T)} + \ldots + \frac{f_{T/2}^2}{\sin^2(\pi/2)}\right]. \qquad (3)$$

Приведены примеры конкретных вычислений типа

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda\,30^\circ}{2\lambda\sin\lambda\,15^\circ}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\left[\frac{0{,}966^2}{\sin^2 15^\circ} + \frac{0{,}259^2}{\sin^2 75^\circ}\right].$$

Даны таблицы некоторых технических констант, употребляемых при расчетах по формуле (3).

Работа содержит неточности. Неясно, как получается последний член выражения в квадратных скобках формулы (3). Именно, членам ряда (1) с коэффициентами $f_{T/2+Tk}$ не соответствуют по формуле (2) при $\lambda = T/2$ новые члены с коэффициентами $f_{T-T/2+Tk}$, общую сумму которых можно было бы преобразовать в выражение $f_{T/2}^2/\sin^2(\pi/2)$. Неясно, почему правая часть формулы (3) не содержит члена с коэффициентом $f_T$, соответствующего членам ряда (1) с $f_{Tk}$ ($k = 1, 2, \ldots$). *Н. А. Бразма*

**334 К. Математическое решение технических задач. Сальвадори** (The mathematical solution of engineering problems. Salvadori Mario G., 258pp., Oxford University Prees, London, 1954, 34 s.) (англ.)

---

**См. также:** 14 **К**, 39, 162, 194, 202, 217, 236, 241, 247, 258, 264, 266, 269, 272, 275, 291, 311, 353 **К**, 449 **Д**, 456 **РЕЦ**

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

**335. Об одной теореме теории представлений топологических групп.** Беккер (Über einen Satz der Darstellungstheorie topologischer Gruppen. Becker Horst). Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin Math.-naturwiss. Reihe, 1952/1953, 2, № 5, 61—66 (нем.)

Доказывается следующая теорема, обобщающая на представления в пространстве Банаха результаты И. М. Гельфанда и референта (Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, № 5, 445—480; Наймарк М. А., Успехи матем. наук, 1948, 3, № 5, 52—145) о соотношениях между унитарными представлениями группы и $*$-представлениями ее группового кольца:

Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная хаусдорфова группа. Всякому ограниченному сильно непрерывному представлению $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$ в пространстве Банаха отвечает инвариантное представление $x \to T_x$ ее группового кольца и обратно, каждому такому представлению $x \to T_x$ отвечает ограниченное сильно непрерывное представление $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$. Это соответствие задается формулой

$$T_x = \int x(g)\, T_g\, dg.$$

Замкнутое подпространство тогда и только тогда инвариантно относительно всех операторов $T_g$, когда оно инвариантно относительно всех операторов $T_x$. Представление $g \to T_g$ унитарно тогда и только тогда, когда представление $x \to T_x$ есть $*$-представление. Два представления группы $\mathfrak{G}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления ее группового кольца.

При этом два представления в пространствах $E_1$ и $E_2$ называются эквивалентными, если существует линейный оператор, топологически отображающий $E_1$ на $E_2$ и переводящий одно представление в другое. *М. А. Наймарк*

**336. Заметка об интеграле Фурье — Стилтьеса** Такэда (Note on Fourier — Stieltjes integral. Takeda Ziro), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 2, 33—36 (англ.)

В первой заметке под тем же заглавием (Kōdai Math. Sem. Repts., 1952, 59—61) автор рассмотрел следующую теорему, которая является обобщением теоремы Бохнера:

Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на локально компактной абелевой группе $G$, и пусть для произвольных элементов $x_\mu \in G$ и произвольных комплексных чисел $c_\mu$ выполняется оценка

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu f(x_\mu) \right| \leqslant M \sup_{\hat{x} \in \hat{G}} \left| \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu (x_\mu, \hat{x}) \right|,$$

где $M$ — константа, $\hat{G}$ — группа характеров, $(x_\mu, \hat{x})$ — характер. Тогда $f(x)$ почти всюду допускает представление

$$f(x) = \int_{\hat{G}} (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}(\hat{x}), \qquad (1)$$

где $\hat{\mu}(\hat{x})$ — ограниченная мера на группе характеров. В первой заметке доказательство годится лишь для непрерывных функций. В настоящей заметке дается полное доказательство.

Кроме того, доказывается следующая теорема, обобщающая одну теорему Крамера:

Пусть $\varphi_w(x)$ $(w \in W)$ — направленное (directed) множество непрерывных, положительно определенных, интегрируемых функций, сходящееся к единице равномерно на каждом компактном множестве группы $G$, и пусть $\varphi_w(0) = 1$ (0 — единица группы) для всех $w \in W$. Тогда измеримая функция $f(x)$ представима в виде (1) в том и только в том случае, если

$$\psi_w(\hat{x}) = \int_G \overline{(x, \hat{x})}\, \varphi_w(x) f(x)\, dx$$

существует и

$$\int_{\hat{G}} |\psi_w(\hat{x})|\, d\hat{x} < M,$$

где $M$ — константа.

Примечание референта. Доказательство первой теоремы в случае непрерывных функций содержится в работе М. Г. Крейна (Докл. АН СССР. 1940, 29, № 4, 280 теорема 4). *Б. М. Левитан*

**337. Алгебра ограниченных функций.** Вулфсон (The algebra of bounded functions. Wolfson Kenneth G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 10—14 (англ.)

Алгебра $B(X)$ всех ограниченных функций на любом множестве $X$, с обычными операциями, нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x)}$ выделяется среди всех коммутативных нормированных алгебр $K$ с единицей и инволюцией следующими условиями:

1) каждый замкнутый ненулевой идеал содержит минимальный идеал;

2) если назвать «аннулятором» идеал, состоящий из всех $x \in K$, удовлетворяющих условиям $Gy = 0$, где $G \subset K$ — некоторое подмножество, то сумма двух аннуляторов есть снова аннулятор.

*Г. Е. Шилов*

**338. Нелинейные преобразования типа Вольтерра в пространстве Винера** Камерон, Фейген (Nonlinear transformations of Volterra type in Wiener space. Cameron R. H., Fagen R. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 3, 552—575 (англ.)

Пусть $C$ — пространство всех непрерывных вещественных функций $x(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant 1$ таких, что $x(0) = 0$; $d_w x$ — мера Винера в $C$ (Wiener N., Acta math., 1930, 55, 117—258); $F(x)$ — измеримый по этой мере функционал; $\int_\Gamma^W F(x)\, d_w x$ — интеграл Винера для $x \in \Gamma$, где $\Gamma$ есть измеримое по Винеру множество из $C$ (Cameron R. H., Martin W. T., Amer. J. Math., 1944, 66, 281—298).

Авторы рассматривают преобразование

$$Tx = x(t) + \Lambda(x \mid t),$$

где функционал $\Lambda(x \mid t)$, определенный для $t \in [0, 1]$ и $x \in S$ ($S$ — открытое выпуклое множество в $C$), обладает «полугладкой вариацией», т. е. его первая вариация

$$\delta\Lambda(x \mid t \mid y) \equiv \frac{\partial}{\partial v} \Lambda(x + vy \mid t)_{v=0}$$

существует для всех $x \in S$, $t \in [0, 1]$, $y \in C$ и представима в форме

$$\delta\Lambda(x \mid t \mid y) = \int_0^1 K(x \mid t, s)\, y(s)\, ds,$$

где

$$K(x \mid t, s) = \begin{cases} K^1(x \mid t, s), & \text{когда } 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \\ (K^1(x \mid t, s) + K^2(x \mid t, s))/2, & \text{когда } 0 \leqslant s = t \leqslant 1, \\ K^2(x \mid t, s), & \text{когда } 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \end{cases}$$

причем $K^1$ и $K^2$ непрерывны в каждой точке $(x, t, s)$, соответственно принадлежащей $S \otimes \{0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1\}$ и $S \otimes \{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$. Непрерывность по $x$ понимается в смысле топологии, заданной в $C$. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть функционал $F(x \mid t)$, определенный для $t \in [0, 1]$ и $x \in S$, где $S$ есть окрестность фиксированной точки $x_0 \in C$, интегрируем по $t$ на $[0, 1]$ при всяком $x \in S$ и пусть $F(x \mid 1)$ непрерывен по $x$ в точке $x_0$. Тогда, если для $x \in S$ существует $\int_0^1 F(x \mid t)\, dx(t)$, который непрерывен в точке $x_0$, то

$$\int_0^1 F(x_0 \mid t)\, d^*x_0(t) = \int_0^1 F(x_0 \mid t)\, dx_0(t), \qquad (1)$$

где

$$\int_0^1 F(x \mid t)\, d^*x(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^1 F_\varepsilon(x \mid t)\, dx(t), \qquad (2)$$

$$F_\varepsilon(x \mid t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} F(x_\varepsilon \mid s)\, ds;\ x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} x(s)\, ds$$

Теорема 2. Если $F(x \mid t) = f(t, x(t))$, где $f(t, u)$ и $\partial f(t, u)/\partial t$ непрерывны по $(t, u) \in [0, 1] \otimes (-\infty, +\infty)$, то выражение (2) существует для всякого $x \in C$ и

$$\int_0^1 F(x \mid t)\, d^*x(t) = g(1, x(1)) - \int_0^1 g_t(t, x(t))\, dt,$$

где

$$g(t, u) = \int_0^u f(t, v)\, dv, \quad g_t(t, u) = \partial g(t, u)/\partial t.$$

При помощи этих и других теорем авторы устанавливают достаточные условия того, чтобы измеримое по Винеру множество функций $\Gamma$ преобразовывалось оператором $T$ в измеримое по Винеру множество и имело место равенство

$$\int_{T\Gamma}^{W} F(y)\, d_w y = \int_{\Gamma}^{W} F(x + \Lambda(x \mid \cdot)) \exp\left\{-2\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(x \mid t)\, d^*x(t) - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} \Lambda(x \mid t)\right]^2 dt\right\} \mid D(x) \mid d_w x,$$

где $y = Tx$, $F(y)$ — измеримый по Винеру функционал и $D(x)$ — определитель Фредгольма ядра $K(x \mid t, s)$. При доказательстве авторы используют предложения работы Камерона и Мартина (Cameron R. H., Martin W. T., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 253—283). *М. М. Вайнберг*

**339. Теория возмущений полуограниченных операторов.** Като (Perturbation theory of semi-bounded operators. Kato Tosio), Math. Ann., 1953, 125, № 5, 445—447 (англ.)

Рассматриваются вопросы теории возмущений в практически важном нерегулярном случае, когда условия, налагаемые на операторы, не гарантируют аналитической зависимости собственных векторов и собственных значений возмущенного оператора от параметра. Исследуется случай изолированной конечнократной точки спектра. Рассмотрим оператор

$$H(\varepsilon) = H + \varepsilon V \quad (\varepsilon \geqslant 0),$$

где $H$ и $V$ — неотрицательно определенные симметрические операторы с общей областью определения в сепарабельном гильбертовом пространстве, и его самосопряженное расширение $H_0(\varepsilon)$. Пусть $\lambda_0$—изолированная точка спектра оператора $H_0(0)$ кратности $m$ и пусть весь спектр $H_0(0)$, лежащий левее собственного значения $\lambda_0$, конечнократный точечный.

Основные результаты: 1. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор $H_0(\varepsilon)$ имеет в окрестности $\lambda_0$ точно $m$ собственных значений, стремящихся к $\lambda_0$ при $\varepsilon \to 0$. Проекционный оператор, соответствующий рассматриваемой части спектра, равномерно непрерывно зависит от $\varepsilon$. 2. Если $\lambda_0$ — простое собственное значение оператора $H_0(0)$ и соответствующий ему собственный вектор $\varphi_0$ принадлежит области определения самосопряженного оператора $H_0^{1/2}(\varepsilon)$, то для собственного значения $\lambda_0(\varepsilon)$ и собственного вектора $\varphi_0(\varepsilon)$ возмущенного оператора $H_0(\varepsilon)$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon) \text{ и } \varphi_0(\varepsilon) = \varphi_0 + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\lambda_1 = \| V_0^{1/2}\varphi_0 \|^2 = (V_0\varphi_0, \varphi_0)$.

При некоторых более сильных предположениях относительно оператора возмущения вычисляются следующие члены асимптотических формул.

Полученные результаты являются усилением результатов Титчмарша (Titchmarsh E. C., Proc. Roy. Soc., 1949, **A200**, 34—46), где в отличие от реферируемой работы предполагается, что спектр невозмущенного оператора дискретен и все собственные векторы невозмущенного оператора принадлежат области определения оператора возмущения. *В. Б. Лидский*

**340. Об операторах, порождающих первый интеграл. Фор** (Sur certains opérateurs implicites donnant lieu à des intégrales premières. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 15, 789—791 (франц.)

Пусть $A$ и $B$ — самосопряженные операторы, зависящие от координат и времени и действующие в гильбертовом пространстве функций $\varphi(q_1, \ldots, q_n; t)$ с нормой

$$\| \varphi \| = \{ \int\limits_{(D)} | \varphi(q_1, \ldots, q_n; t) |^2 d\tau \}^{1/2},$$

где $(D)$ — область риманова пространства с элементом объема $d\tau = \sqrt{g}\, dq_1 \cdot \ldots \cdot dq_n$. Предполагается, что операторы $A$ и $B$ перестановочны и спектры их дискретны. Если $A\varphi_k = \alpha_k(t)\varphi_k$, $B\varphi_k = \beta_k(t)\varphi_k$, где $\varphi_k$ $(k = 1,2, \ldots)$ — полная ортонормированная система собственных функций операторов $A$ и $B$, то уравнение $A\varphi - \lambda B\varphi = 0$ $(\varphi \neq 0)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\varphi = \varphi_k$ и соответственно $\lambda = \lambda_k = \alpha_k(t)/\beta_k(t)$.

Пусть $C$ — самосопряженный оператор, определенный системой собственных функций $\varphi_k$ $(k = 1,2, \ldots)$ и собственных значений $\lambda_k$ $(k = 1,2, \ldots)$. Оператор $C$, порожденный таким образом операторами $A$ и $B$, называется первым интегралом в данной механической системе $S$, характеризуемой гамильтонианом $H$, если его собственные значения $\lambda_k$ $(k = 1,2, \ldots)$ и соответствующие вероятности в любом состоянии $\psi(q_1, \ldots, q_n; t)$ системы $S$ не зависят от времени $t$.

Устанавливается необходимое и достаточное условие того, что оператор $C$ является первым интегралом. Это условие имеет вид

$$AB' - BA' = 0, \qquad (1)$$

где

$$A' = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(AH - HA),$$

$$B' = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(BH - HB)$$

Условие (1) устанавливается с помощью тождества

$$\int\limits_{(D)} \varphi_j^* (BA' - AB')(\varphi_k)\, d\tau =$$

$$= (\beta_j\alpha_k - \alpha_j\beta_k) \int\limits_{(D)} \varphi_j^* \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h} H(\varphi_k) \right) d\tau +$$

$$+ \left( \beta_j \frac{d\alpha_k}{dt} - \alpha_j \frac{d\beta_k}{dt} \right) \delta_{kj} = 0.$$

*И. М. Глазман*

**341. О векторном интегральном уравнении в абстрактном гильбертовом пространстве. Ги** (Sur une équation vectorielle intégrale dans un espace de Hilbert abstrait. Guy Roland), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 1, 46—49 (франц.)

Доказывается существование решения уравнения

$$x(t) = x^0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

в котором $x(t)$, $x^0(t)$ — векторные функции скалярного аргумента $t$ со значениями из пространства Гильберта $(\mathfrak{h})$ и $F(t, \tau)$ — семейство операторов из $(\mathfrak{h})$, зависящих от двух параметров, изменяющихся в интервале $(t_0, t_1)$.

В случае, когда $F(t, \tau)$ — ограниченный эрмитов оператор и $F(t, \tau)\, x^0(\tau)$ интегрируемо в смысле Бохнера, решение получается в виде сильно сходящегося ряда

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(t), \qquad (1)$$

в котором с помощью спектрального представления оператора, $x^{(n)}(t)$ определяются последовательно по формуле

$$x^{(n)}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{m(t,\tau_n)}^{M(t,\tau_n)} \lambda(t, \tau_n)\, d\,[E_{\lambda(t,\tau_n)} x^{(n-1)}(x_n)]\, d\tau_n,$$

где $\{E_{\lambda(t,\tau_n)}\}$ — семейство проекционных операторов, и $m(t, \tau_n)$ и $M(t, \tau_n)$ — нижняя и верхняя грани семейства $F(t, \tau_n)$. В случае, когда $F(t, \tau)$ — неограниченный самосопряженный оператор, для доказательства существования решения (1), в котором

$$x^{(n)}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} F_{j_n}(t, \tau_n)\, P_{L_{j_n}(t,\tau_n)} x^{(n-1)}(\tau_n)\, d\tau_n,$$

предполагается, что числа

$$R_n = \max_{t_0 \leqslant t,\, \tau \leqslant t_1} \sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} \| F_{j_n}(t, \tau_n)\, P_{L_{j_n}(t,\tau)} x^{(n-1)}(\tau_n) \|^2$$

ограничены числом, не зависящим от $n$. Здесь $L_{j_n}(t, \tau_n)$ — ортогональные подпространства, на которые разбито $(\mathfrak{h})$ с помощью спектрального семейства $G_{\lambda(t,\tau_n)}$ семейства ограниченных операторов, $B = (I + F^2)^{-1}$, $\{F_{j_n}(t, \tau_n)\}$ — семейство ограниченных операторов, индуцированных операторами $F(t, \tau)$ в указанных подпространствах, и $P_{L_{j_n}(t,\tau_n)} x^{(n-1)}(\tau_n)$ — проекция $x^{(n-1)}(\tau_n)$ на $L_{j_n}(t, \tau_n)$ с помощью оператора $P_{L_{j_n}(t,\tau_n)}$.

В работе имеются опечатки. На странице 47, 7-я строка снизу, написано $N \leqslant \max M(t, \tau)$. Знак неравенства должен быть обращен в противоположную сторону. На стр. 48, 13-я строка сверху, нижний предел интеграла должен быть $t_0$ вместо написанного $\lambda_0$.

*А. Т. Талдыкин*

**342. Операторы в задачах с начальными данными. Редхеффер** (Operators and initial-value problems. Redheffer R. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 617—629 (англ.)

Рассматривается двупараметрическое семейство аддитивных и однородных операторов $\varphi_{ab}$ $(b > a)$, определенных на некотором подмножестве комплекснозначных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$. Семейство называется точечно-ограниченным, если

$$| \varphi_{ab} f |^2 \leqslant M_{ab} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 dx \quad (f(x) \in L^2(-\infty, \infty)), \qquad (1)$$

ограниченным в среднем, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{ab} f|^2 dy \leqslant N_{ab} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \right)^2 \qquad (2)$$

$$(f(x) \in L^1(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty)),$$

и замкнутым, если

$$\varphi_{ab}\varphi_{bc} f = \varphi_{ac} f \quad (f(x) \in L^1(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty)) \qquad (3)$$

при $a < b < c$.

Используя теорему о виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, автор доказывает, что из (1), (2), (3) следует

$$\varphi_{ab} f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{a,b}(x, y) f(x)\, dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{a,b}(x, y)|^2 dx \leqslant M_{ab}$$

и для почти всех $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{ab}(x, y)|^2 dy \leqslant N_{ab};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{ab}(x, y)\, \lambda_{bc}(y, z)\, dy = \lambda_{ac}(x, z).$$

Если, кроме того, из $\varphi f = g$ при любом вещественном $c$ следует, что $\varphi f(x - c) = g(y - c)$ и $\varphi f \not\equiv 0$, если $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx > 0$, то $\varphi_{ab} = T^{-1}\Lambda_{ab} T$, где

$$Tf = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{l.i.m.}_{m \to \infty} \int_{-m}^{m} f(x)\, e^{-inx} dx$$

$$\Lambda_{ab}(u) = \exp \int_a^b d_x \alpha(x, u)$$

(функция $\alpha(x, u)$ имеет по $x$ ограниченную вариацию в каждом конечном интервале) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{ab}(u)|^2 du \leqslant M_{ab}.$$

Если же $\varphi_{ab} = \varphi_{a+c,\, b+c}$, то $\varphi_{ab} = T^{-1}\Lambda^{b-a}(u) T$.

В заключение, доказывается, что если функции

$$u(x, y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} [\Lambda(t)]^x F(t)\, dt$$

удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению в частных производных при всех $F(t)$, обеспечивающих хорошую сходимость интеграла, то $\log \Lambda(t)$ почти всюду равен алгебраической функции, а уравнение линейное однородное с постоянными коэффициентами.

Эти теоремы иллюстрируются простыми задачами математической физики. *В. А. Марченко*

**343. Возмущение нормальных операторов.** **Джеймисон** (Perturbation of normal operators. Jamison S. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 103—110 (англ.)

Рассматривается вопрос об аналитическом возмущении ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве (оператор $N$ называется нормальным, если $NN^* = N^*N$). Исследуется случай изолированной конечнократной точки спектра. Хорошо известная в теории возмущений самосопряженных операторов теорема (Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, Изд-во иностр. лит-ры, 1954, 404) переносится на случай нормальных операторов. *В. Б. Лидский*

**344. О некоторых приближенных методах для оператора $T^*T$.** **Като** (On some approximate methods concerning the operators $T^*T$. Kato Tosio), Math. Ann., 1953, 126, № 3, 253 — 262 (англ.)

Гринберг и Диас (Greenberg H. J., J. Math. Phys., 1948, 27, 161 — 182; Diaz J. B., Greenberg H. J., J. Math. Phys., 1948, 27, 193 — 201) предложили метод определения верхней и нижней граней решения краевых задач для оператора $\Delta$ с помощью так называемых пробных функций. Автор обобщает их результаты, заменяя оператор Лапласа $\Delta$ оператором $T^*T$.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$ — два гильбертовых пространства, а $T$ — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $\mathfrak{D}_T$ и областью значений $\mathfrak{R}_T \subset \mathfrak{H}^*$. При этом, как известно, существует сопряженный оператор $T^*$ с областью определения $\mathfrak{D}_{T^*}$, плотной в $\mathfrak{H}^*$, и областью значений $\mathfrak{R}_{T^*} \subset \mathfrak{H}$. Положим $B = \sqrt{T^*T}$ и будем предполагать, что нулевое подпространство оператора $T$ состоит только из нуля, так что существует оператор $B^{-1}$. Основным результатом первой части статьи является следующая теорема, в которой роль пробных функций играют пробные элементы $u$, $v$, $u'$, $v'$.

Теорема 1. Пусть $f$ и $g$ — два заданных элемента из $\mathfrak{H}$, принадлежащих $\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*}$, и пусть $\xi = (B^{-1}f, B^{-1}g)$. Пусть, далее, $u$ и $v$ — два каких-нибудь элемента из $\mathfrak{D}_T$, а $u'$ и $v'$ — два каких-нибудь элемента из $\mathfrak{D}_{T^*}$, удовлетворяющих условиям $T^*u' = f$, $T^*v' = g$.

Если обозначить $\alpha = (u, g) + (f, v) - (Tu, Tv)$, $\beta = (u', v')$, $\varepsilon = \| Tu - u' \|$, $\delta = \| Tv - v' \|$, то

$$|2\xi - (\alpha + \beta)| \leqslant \varepsilon\delta. \qquad (1)$$

Неравенство (1) в случае ограниченности оператора $(T^*T)^{-1}$ дает оценку для приближенного значения $(\alpha + \beta)/2$ величины $\xi = (\varphi, g)$, где $T^*T\varphi = f$, а $g$ — любой элемент из $\mathfrak{H}$. Следует отметить, что нулевое подпространство оператора $T^*$, вообще говоря, не пусто, так что условия (1) оставляют некоторую свободу в выборе $u'$ и $v'$.

Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{H}$ есть функциональное пространство, корректно проведенная замена элемента $g$ $\delta$-функцией дает в качестве $\xi$ значение функции $\varphi$ в данной точке.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область плоскости, $D$ — многообразие всех функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ и имеющих кусочно-непрерывную первую производную, а $D'$ — часть $D$, выделяемая условием обращения функций в нуль на границе $\Gamma$ области $\Omega$. Если $\mathfrak{H} \equiv L_2(\Omega)$, $\mathfrak{H}^* \equiv L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $Tu = \nabla u$ (на $D'$), то будет $T^*u = -\operatorname{div} u'$ (на $D \times D$) и $T^*Tu = \Delta u$ (на $D'$).

Теорема 1 в сочетании с замечанием об использовании $\delta$-функции дает неравенство (1), где $\xi = \varphi(x_0, y_0)$, $\Delta\varphi = f$ ($\varphi \in D'$), $u \in D'$, $\operatorname{div} u' = -f$ ($u' \in D \times D$), $v = (1/2\pi)\ln(1/r) + w$ ($w \in D$, $v = 0$ на $\Gamma$), $v' = \nabla[(1/2\pi)\ln(1/r)] + w'$ ($\operatorname{div} w' = 0$, $w' \in D \times D$), $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, так что

$$\alpha = u(x_0, y_0) + \iint\limits_{(\Omega)} f\bar{v}\,dx\,dy - \iint\limits_{(\Omega)} \nabla u \cdot \nabla \bar{v}\,dx\,dy,$$

$$\beta = \iint\limits_{(\Omega)} u' \cdot \bar{v}'\,dx\,dy, \quad \varepsilon^2 = \iint\limits_{(\Omega)} |\nabla u - u'|^2\,dx\,dy,$$

$$\delta^2 = \iint\limits_{(\Omega)} |\nabla w - w'|^2\,dx\,dy.$$

Неравенство (1) несколько точнее соответствующих неравенств Гринберга и Диаса и, кроме того, не требует от функций $u$, $w$,... существования вторых непрерывных производных, как у Гринберга и Диаса. Далее аналогично рассматривается задача Дирихле.

Во второй части статьи рассматривается задача о приближенном вычислении собственных значений и собственных элементов оператора $T^*T$. При этом используются неравенства, установленные автором ранее в теории возмущений (Math. Ann., 1953, **125**, 435—447). Непосредственное применение этих неравенств требует от пробного элемента $w$ принадлежности к $\mathfrak{D}_{T^*T}$. Однако, применяя метод графика Неймана, автор находит способ замены одного пробного элемента $w \in \mathfrak{D}_{T^*T}$ двумя пробными элементами $u \in \mathfrak{D}_T$, $u' \in \mathfrak{D}_{T^*}$. *И. М. Глазман*

**345. Унитарные алгебры и пространства Эмброза.** **Паллю де Ла Барьер** (Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose. Pallu de La Barrière R.), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, № 4, 381—401 (франц.)

Рассматриваются гильбертовы пространства $H$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) в $H$ определена инволюция $x \to x^*$;

2) для некоторых пар $x, y \in H$ определено произведение $xy \in H$;

3) в $H$ есть всюду плотное множество $A$, являющееся кольцом с инволюцией по отношению к определенным в $H$ инволюции и умножению (в частности, если $u, v \in A$, то $u^* \in A$, $uv \in A$), причем для $u, v, w \in A$: а) $(u, v) = (v^*, u^*)$; б) $(uv, w) = (v, u^*w)$; в) $uv$ есть непрерывная функция от $u$ в смысле нормы в $H$; г) элементы $uv$ образуют множество, плотное в $A$.

Всякое кольцо с инволюцией $A$, в котором определено скалярное произведение $(u, v)$, $u, v \in A$, удовлетворяющее условиям а) — г), называется унитарной алгеброй. Пространство $H$, удолетворяющее условиям 1) — 3), называется пространством Эмброза, а алгебра $A$, удовлетворяющая условию 3), — унитарной алгеброй, подчиненной пространству $H$. В этом случае $H$ называется также пространством Эмброза алгебры $A$. Доказывается, что при выполнении перечисленных выше условий 1) — 3):

1) Для всех $u \in A$ оператор $R_u x = xu$ определен для всех $x \in H$ и ограничен.

2) Если $l_x$ — сужение на $A$ оператора $L_x y = xy$ (область определения $L_x$ есть совокупность тех $y$, для которых определено $xy$), то $L_x = l_{x^*}^*$; аналогично, если $r_x$ — сужение на $A$ оператора $R_x y = yx$, то $R_x = r_{x^*}^*$.

3) Совокупность $B$ тех элементов $x$, для которых $L_x$ (или, что то же, $R_x$) есть ограниченный оператор (эти элементы $x$ называются ограниченными), образует унитарную алгебру в $H$, удовлетворяющую тому же условию 3), что и алгебра $A$. Совокупность всех унитарных алгебр, подчиненных $H$, есть совокупность всех $*$-подалгебр $B$, плотных в $H$.

4) Если $L$ и $R$ — слабо замкнутые кольца, порожденные всеми операторами $L_u$ и $R_u$, $u \in A$, соответственно, то $L = R'$, $R = L'$.

5) Для всякого $x \in H$:

$$L_x = l_x^{**}, \quad R_x = r_x^{**}, \quad L_x^* = L_{x^*}, \quad R_x^* = R_{x^*}.$$

Кроме того:

6) Для всякой унитарной алгебры $A$ существует одно и только одно пространство Эмброза $H = H(A)$, которому $A$ подчинена. В качестве примера рассматриваются пространства $L^p$, $p > 1$, функций $f(x)$ на локально компактной унимодулярной группе $G$ с нормой $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$, где $dx$ — мера Хаара в $G$. Если определить в $L^2$ инволюцию по формуле $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, а умножение по формуле $f \cdot g(x) = \int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$ (считая его определенным лишь тогда, когда $f \cdot g(x) \in L^2(G)$), то $L^2$ есть пространство Эмброза, а $L^1 \cap L^2$ — унитарная алгебра, подчиненная $L^2$.

Полученные результаты применяются также к построению и изучению тензорного произведения унитарных алгебр.

В заключение излагается ряд результатов о центре пространства Эмброза. Центром $H_\natural$ пространства Эмброза $H$ называется совокупность всех элементов $x \in H$, удолетворяющих одному из следующих трех эквивалентных условий: $\alpha$) $xa = ax$ для всех $a \in B$; $\beta$) $l_x = r_x$; $\gamma$) $L_x = R_x$.

Автор доказывает, что:

1) Для всякого $u \in H_\natural$ и $a, b \in B$ $(L_a L_b u, u) = (L_b L_a u, u)$.

2) $H_\natural$ есть коммутативное пространство Эмброза, т. е. в нем существует коммутативная подчиненная ему унитарная алгебра, именно $B \cap H_\natural$.

Если положить $x_\natural = P_x$, где $P$ — оператор проектирования на $H_\natural$, то:

3) Если $x, y \in H$ и $xy$, $yx$ определены, то $(xy)_\natural = (yx)_\natural$.

4) Если $x \in H$, то $(x^*)_\natural = (x_\natural)^*$.

5) Если $x \in H_\natural$ и $y \in H$, то $(xy)_\natural = xy_\natural$.

Кроме того:

6) Если положить $H_f = L(H_\natural) = R(H_\natural)$ и $H_i = H \ominus H_f$, то $H_f$ и $H_i$ соответственно конечны и вполне бесконечны для $L$ и $R$.

7) Если $H$ имеет единичный элемент (т. е. элемент $e$, удовлетворяющий условию $ea = ae = a$ для всех $a \in B$), то $L$ и $R$ конечного класса; для неприводимого пространства Эмброза $H$ существование единичного элемента $e$ необходимо и достаточно для конечности $L$ и $R$. *М. А. Наймарк*

346. **О трансцендентных точках в собственных пространствах дискретных полуупорядоченных линейных пространств. Накано** (On transcendental points in proper spaces of discrete semiordered linear spaces. Nakano Hidegorô), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1953, сер. 1, **12**, 105—110 (англ.)

Автор определяет регулярные кардинальные числа как такие, которые содержатся в любой совокупности $M$ кардинальных чисел, обладающей свойствами: $\aleph_0 \in M$; если $u \in M$, то $2^u \in M$; если $u_\alpha \in M$ для каждого $\alpha$ из множества $J$ и если мощность множества $J$ содержится в $M$, то $\sum u_\alpha \in M$; если $u < v$ и $v \in M$, то $u \in M$. Используя технику теории линейных частично упорядоченных множеств, автор доказывает следующую теорему:

Пусть $S$ — множество точек $x$, мощность которого регулярна. Пусть $R$ — множество вещественнозначных функций $f(x)$, обычным образом частично упорядоченное. Тогда каждый линейный положительный функционал $\varphi(f)$ имеет вид $\varphi(f) = \sum c_i f(x_i)$, где $c_i$ — некоторые неотрицательные постоянные в конечном числе, причем как $c_i$, так и их число зависит только от $\varphi$. В более ранней работе Маккея (Mackey, Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 719—722) в основном имеются указания, что этот результат следует из работы Улама (Ulam, Fundam math., 1930, **16**, 140—150). *I. Halperin*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 137.

347. **Об относительно регулярных операторах. Аткинсон** (On relatively regular operators. Atkinson F. V.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1,38 — 56 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — пространство Банаха, $\mathfrak{R}^*$ — сопряженное пространство, $\mathfrak{R}_1$ — кольцо ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathfrak{R}$; $\alpha(T)$ — число линейно независимых решений уравнения $Tf = 0$ ($T \in \mathfrak{R}_1$); $\beta(T)$ — число линейно независимых решений уравнения $lT = 0$, $l \in \mathfrak{R}^*$.

Исследуются операторы из $\mathfrak{R}_1$ при следующих условиях: $(A_3)$ хотя бы одно из чисел $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ конечно; $(B_1)$ для разрешимости $Tf = g$ необходимо и достаточно, чтобы $lg = 0$ для всех $l \in \mathfrak{R}^*$ таких, что $lT = 0$ (нормальная разрешимость); $(B_2)$ $T\mathfrak{R}$ замкнуто; $(B_3)$ существует $X \in \mathfrak{R}_1$ такой, что $TXT = T$.

Известно, что $(B_1)$ и $(B_2)$ эквивалентны. Показано, что они всегда вытекают из $(B_3)$, но обратное имеет место только при дополнительных условиях.

Если существует $T^{-1}$, то оператор $T$ называется «регулярным»; если имеет место $(B_3)$, то $T$ называется «относительно регулярным». Все регулярные операторы, конечномерные операторы, операторы $S + V$, где $S$ — регулярный, $V$ — вполне непрерывный, операторы проектирования — относительно регулярны. Неконечномерные вполне непрерывные операторы и нильпотентные операторы не являются относительно регулярными.

Вводится множество $\mathfrak{C}(m, n, B_r)$ операторов, удовлетворяющих $(B_r)$, $r = 1,2$ или $3$, $\alpha(T) = m$, $\beta(T) = n$, причем одно из последних конечное; если $\alpha(T) \leqslant m$, $\beta(T) \leqslant n$, то соответствующее множество обозначается $\mathfrak{D}(m, n, B_r)$.

В статье исследуются алгебраические, топологические и спектральные свойства указанных классов операторов.

Доказаны, например, следующие алгебраические теоремы: 3. Если $S, T \in \mathfrak{R}_1$, $ST \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $m < \infty$, то $T \in \mathfrak{D}(m, \infty, B_3)$; 4. Если $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', n', B_3)$, $m < \infty$, $m' < \infty$, то $ST \in \mathfrak{D}(m + m', n + n', B_3)$; 5. Если $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$, $m, n, m' < \infty$, то $ST \in \mathfrak{C}(m'', \infty, B_3)$, $TS \in \mathfrak{C}(m''', \infty, B_3)$, где $m''$, $m''' \leqslant m + m'$.

Топологические теоремы:

8. Пусть $T \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, где хотя бы одно из чисел $m$ и $n$ конечно, тогда существует $\rho > 0$ такое, что если $\| T' - T \| < \rho$, то $T' \in \mathfrak{D}(m, n, B_3)$;

10. Пусть $T \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $V$ — вполне непрерывный. Тогда $T + V \in \mathfrak{C}(m', n', B_3)$, где $m' < \infty$, если $m < \infty$ и $n' < \infty$, если $n < \infty$;

12. Пусть $T \in \mathfrak{C}(m, \infty, B_3)$ и $A_\lambda$ — аналитическая функция $\lambda$, $A_\lambda \in \mathfrak{R}_1$, определенная в окрестности $\lambda = 0$, $A_0 = 0$. Тогда существуют $\rho > 0$ и $m' \geqslant 0$, $m' \leqslant m$, такие, что для $0 < |\lambda| < \rho$ имеет место: $T - A_\lambda \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$.

Далее исследуется оператор $T_\lambda$: изучена максимальная область $\lambda$-плоскости, где $T_\lambda$ является относительно регулярным, доказано, что $\beta(T_\lambda) = \infty$ всюду и $\alpha(T_\lambda) \leqslant m' < \infty$ всюду, за исключением изолированных точек, не являющихся пределами точек, в которых $m' < \alpha(T_\lambda) < \infty$. Такие изолированные точки названы обобщенными собственными значениями.

Дается обобщенная спектральная классификация в терминах Э. Хилла (Функциональный анализ и полугруппы, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 48).

Случай конечных $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ был рассмотрен ранее другими авторами (Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер матем., 1943, **7**, № 3, 147—166; Халилов З. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, № 2, 163—176; Аткинсон Ф. В., Матем. сб., 1951, **28(70)**, № 1, 3—14; Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, 53—60; Гохберг И. Ц., Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 1, 9—12; 1951, **78**, № 4, 629—632; Матем. сб., 1953, **33(75)**, № 1, 193—198; Крейн М. Г., Красносельский М. А., Матем. сб., 1952, **30(72)**, № 1, 219—224). *З. И. Халилов*

348. **О нелинейных уравнениях, рассматриваемых в пространствах Банаха. Фенье** (Banach terekben értelmezett nemlineáris egyenletekröl. Fenyö István), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 1, 71—83 (венг.)

В работе содержатся следующие предложения:

Теорема 1. Пусть $f(x)$ есть нелинейный оператор, который действует из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$. Если $f(x_0) = y_0$ и $f(x)$ имеет в точке $x_0$ непрерывный дифференциал Фреше, причем линейный оператор $f'(x_0)$ имеет ограниченный обратный оператор, тогда уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение для всякого $y$, достаточно близкого к $y_0$.

Теорема 1-а. Пусть $F(x, y)$ — функция двух переменных, принадлежащих пространствам $X$ и $Y$ соответственно, значения которой также принадлежат некоторому банахову пространству. Пусть, далее, $F(x_0, y_0) = 0$, причем в точке $(x_0, y_0)$ функция $F(x, y)$ непрерывна по обоим переменным, имеет

по $x$ непрерывный частный дифференциал Фреше и пусть линейный оператор $F'_x(x_0, y_0)$ имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственное решение $x$ при каждом $y$, достаточно близком к $y_0$.

В теоремах 1 и 1-а даны оценки, которые выражают близость $y$ к $y_0$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть, далее, $x_0$ есть первое приближенное решение уравнения $f(x) = 0$ и $U_0$ — оператор, обратный к линейному оператору $f'(x_0)$. Тогда итерации $x_n = x_{n-1} - U_0 f(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ сходятся к одному из корней уравнения $f(x) = 0$, если $\| U_0 f(x_0) \| \leqslant r(1-q)$, где $r$ есть радиус шара $\| x \| \leqslant r$, для элементов которого выполняется неравенство $\| U_0 [f'(x) - f'(x_0)] \| \leqslant q < 1$. Внутри шара $\| x \| \leqslant r$ итерации сходятся к единственному решению.

Доказательство теоремы 1-а в работе отсутствует; автор лишь отмечает, что она может быть доказана тем же методом последовательных приближений, которым он пользуется при доказательстве теоремы 1. Доказательство теоремы 2 получается сведением ее к теореме 1; обе они связаны с одной теоремой Канторовича (Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, **18**, 127). Перечисленные теоремы автор применяет к исследованию нелинейных уравнений (алгебраических, дифференциальных и интегральных).

В качестве примера этих приложений приведем следующее предложение:

Пусть $F(x, y, \varphi, \lambda)$ непрерывна по $x$ и $y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$, имеет непрерывные частные производные по $\varphi$ и $\lambda$ и $F(x, y, \varphi, 0) \equiv 0$. Пусть $X$ есть пространство комплексных чисел, а $Y$ — пространство непрерывных функций на $[0, 1]$. На основании теоремы 1-а можно утверждать, что если единица не является собственным значением ядра

$$(\partial F(x, y, \varphi(y), \lambda) / \partial \varphi)_{\varphi=0,\ \lambda=0},$$

то при достаточно малом $|\lambda|$ уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 F(x, y, \varphi(y), \lambda)\, dy$$

имеет единственное решение.

Примечания референта. 1. Теорема 1-а о неявных функциях не является новой (см. например, Hildebrandt T. H., Graves L. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 127—153 или Люстерник Л. А., Соболев В. И., «Элементы функционального анализа», Гостехиздат, 1951, § 44). Теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 1-а.

2. Предложенный автором прием доказательства теоремы 1 (а следовательно, и теоремы 2) является ошибочным, так как он основан на применении формулы Лагранжа для операторов; известно, однако, что формула Лагранжа верна для функционалов, но не для операторов.

3. В примере 7 (стр. 83) отсутствует та четкость, которая нужна для проверки верности утверждения автора. *М. М. Вайнберг*

**349. Условие того, что $\lim_{n\to\infty} n^{-1} T^n = 0$. Ритт** (A condition that $\lim_{n\to\infty} n^{-1} T^n = 0$. Ritt R. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 898—899 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $T$ — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве, удовлетворяющий условиям: 1) спектр оператора $T$ лежит внутри единичного круга (с возможным исключением $z = 1$); 2) существуют $M > 0$ и $\eta > 0$ такие, что если $|z| \geqslant 1$ $(z \neq 1)$ и $|z - 1| < \eta$, то $\| (z-1)[zI - T]^{-1} \| \leqslant M$. Тогда $\lim_{n\to\infty} n^{-1} T^n = 0$.

*Г. П. Акилов*

**350. О некоторых векторных подпространствах пространства $L^p$. Гротендик** (Sur certains sous-espaces vectoriels de $L^p$. Grothendieck A.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 1, 158—160 (франц.)

Пусть $M$ — локально компактное пространство, в котором задана некоторая мера, и $\{f\}$ — множество измеримых функций, заданных на некотором подмножестве меры $\mu$ пространства $M$ и принимающих комплексные значения.

Рассматриваются пространства $L^\infty(\mu)$ и $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ таких функций $f$. Если $\mu$ конечно, то всякое подпространство $H$ пространства $L^\infty(\mu)$, замкнутое в $L^p(\mu)$, имеет конечную размерность. Доказаны также теоремы:

1. Если мера $\mu$ не дискретна, то существует пространство $H$, образованное из функций, принадлежащих каждому $L^p(\mu)$ для $1 \leqslant p < +\infty$, замкнутое в каждом из этих пространств $L^p(\mu)$.

2. Если мера $\mu$ дискретна, то всякое пространство $H$, содержащееся и замкнутое в некоторых $L^p(\mu)$ и $L^q(\mu)$, где $p \neq q$ и $1 \leqslant p, q < +\infty$, имеет конечную размерность. *М. М. Вайнберг*

**351. О мультипликативных функционалах. Лежанский** (Sur les fonctionnelles multiplicatives. Leżański T.), Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, 13—23 (франц.)

Пусть $\Xi$ — замкнутое линейное подпространство пространства всех линейных функционалов, определенных на некотором банаховом пространстве $X$, и $\mathfrak{R}$ — некоторая банахова алгебра (с единицей $I$) эндоморфизмов пространства $\Xi$ такая, что для определенных $K \in \mathfrak{R}$, $\varphi \in \Xi$, $x \in X$ оператор $M_{K,\varphi,x}$, определенный равенством $M_{K,\varphi,x}(\psi) = K(\psi)(x) \cdot \varphi$, принадлежит к $\mathfrak{R}$. Любой линейный функционал $F$ на $\mathfrak{R}$ определяет оператор $T_F$, данный соотношением $T_F(\varphi)(x) = F(M_{K,\varphi,x})$. Множество $\mathfrak{M}$ функционалов $F$ таких, что $T_F \in \mathfrak{R}$ и $F(M_{K,\varphi,x}) = K T_F(\varphi)(x)$, является полным метрическим пространством. $\mathfrak{M}$ является банаховой алгеброй со следующим определением умножения: $H = F \cdot G$ для $F$, $G \in \mathfrak{M}$ представляет собой функционал $H(K) = G(KT_F)$ такой, что $T_{T_1 \cdot T_2} = T_{T_1} \cdot T_{T_2}$. В работе «Теория Фредгольма линейных уравнений в банаховом пространстве» (см. реф. 352) автор определил функционал $D(F)$ на пространстве $\mathfrak{M}$, называемый определителем оператора $I + T_F$; он является обобщением определителя Фредгольма для интегральных уравнений.

Доказывается, что определитель $D(F)$ является мультипликативным функционалом, точнее, что определитель $D(F+G+F \cdot G)$ произведения $(I+T_F) \times$

$(I+T_G)=I+T_{F+G+F\cdot G}$ равен произведению определителей $D(F)$ и $D(G)$ операторов $I+T_F$ и $I+T_G$ в предположении, что $F\cdot G=G\cdot F$.

Эта теорема является частным случаем следующей теоремы: Пусть $\Phi$ — линейный функционал в некоторой банаховой алгебре $\mathfrak{A}$ и для $A\in\mathfrak{A}$ пусть: $a_0(A)=1$, $U_1(A)=A$, $U_n(A)=a_{n-1}A-A-U_{n-1}(A)A$, $a_n(A)=\Phi(U_n(A))/n$, $D_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n a_n(A)$ (последний ряд всегда сходится для достаточно малых $\lambda$). Если $A_1\cdot A_2=A_2\cdot A_1$ ($A_1, A_2\in\mathfrak{A}$), то для достаточно малых $\lambda$

$$D_\lambda(A_1)\cdot D_\lambda(A_2)=D_\lambda(A_1+A_2+\lambda A_1\cdot A_2). \qquad (1)$$

Следующая теорема показывает, что $D_\lambda(A)$ является единственным нетривиальным мультипликативным функционалом, удовлетворяющим условию (1):

Если $\Phi_n$ — однородный полином $n$-й степени на $\mathfrak{A}$, $n=1, 2, \ldots$, $\Phi_0=\Phi$ и если ряд $\psi(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(A)$ сходится для $\|A\|<\delta$ и $\psi(A)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(2A+A^2)$ для $\|A\|<\delta$ и $\|2A+A^2\|<\delta$, то $\Phi_n(A)=a_n(A)$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ *R. Sikorski*

**352. Теория Фредгольма линейных уравнений в банаховом пространстве. Лежанский** (The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces. Leżański T.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 244—276 (англ.)

Пусть $X$ — фиксированное банахово пространство, $\Xi$ — замкнутое линейное подпространство линейных функционалов в $X$, $\mathfrak{K}$ — фиксированное замкнутое линейное подпространство всех линейных операторов, преобразующих $\Xi$ в себя, $F$ — фиксированный линейный функционал, определенный на $\mathfrak{K}$.

Оператор $K\in\mathfrak{K}$ определяет билинейный функционал $K\varphi x$ на $\Xi\times X$ ($\varphi\in\Xi$, $x\in X$); вместо $F(K)$ пишем также $F_{\varphi x}\{K\varphi x\}$.

Функционалу $F$ ставится в соответствие оператор $T=T_F$, определяемый соотношением $T_F\varphi x=F_{\psi y}\{I\psi\cdot I\varphi y\}$.

Предположим, что $T\in\mathfrak{K}$ и что для произвольного $K\in\mathfrak{K}$, $x_0\in X$ и $\varphi_0\in\Xi$ оператор $M$: $M\psi=K\psi x_0\cdot\varphi_0$ принадлежит к $\mathfrak{K}$, а также, что $F(M)=KT\varphi_0 x_0$.

Исследуется линейное уравнение

$$\varphi+KT\varphi=\varphi_0. \qquad (1)$$

где $K\in\mathfrak{K}$, $\varphi_0\in\Xi$ с неизвестной $\varphi\in\Xi$. Определитель этого уравнения (т. е. оператор $I+KT$) представляет собой абсолютно сходящийся ряд $D(F)=D_0=a_0+a_1+a_2+\ldots$, где

$$a_0=1,\quad a_n=\frac{1}{n!}\cdot F_{\psi_1 y_1}F_{\psi_2 y_2}\ldots F_{\psi_n y_n}\left\{K\begin{pmatrix}\psi_1,\ldots,\psi_n\\ y_1,\ldots,y_n\end{pmatrix}\right\},$$

а $K\begin{pmatrix}\psi_1,\ldots,\psi_n\\ y_1,\ldots,y_n\end{pmatrix}$ является определителем матрицы $(K(\psi_i y_i))_{i,j=1,2,\ldots,n}$.

Уравнение (1) имеет решение $\varphi$ для каждого $\varphi_0\in\Xi$ тогда и только тогда, когда $D_0\neq 0$. Решение будет тогда единственным. Автор дает выражения для решения $\varphi_0$ и для определителя $D_0$, представляющие собой обобщения на случай произвольного пространства Банаха соответствующих формул Фредгольма. Обобщая понятие минора Фредгольма, автор определяет минор $D_n$ порядка $n=1, 2, 3, \ldots$ определителя $D_0$ (он представляет собой $2n$-линейный оператор в $\Xi\times X$).

Если $D_0=0$, то $D_n\neq 0$ для некоторого $n$. Пусть $n$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию. Уравнение $\varphi+KT\varphi=0$ имеет тогда точно $n$ линейно независимых решений, но уравнение (1) имеет решение только при определенных дополнительных ограничениях на $\varphi_0$, аналогичных ограничениям в теории интегральных уравнений Фредгольма. Во второй части работы автор дает многочисленные применения в случаях, когда $\Xi$ является одним из пространств $L^p$, $M$, $CM$, $l^p$, $m$, а $K$ и $T$ являются интегральными операторами или матрицами.

В случае системы бесконечных линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных (в случае пространств $l$ и $m$) автор показывает, что его понятие определителя является обобщением определителя Коха, дает обобщение формула Крамера и доказывает, что определитель $D_0$ является мультипликативным функционалом и так называемый определитель суперпозиции $(I+T_1)(I+T_2)$ является произведением определителей операторов $(I+T_1)$ и $(I+T_2)$.

Алгоритм Лежанского отличается от алгоритма, данного Растоном (Ruston A. F., Proc. London Math. Soc., 1951, сер. 2, **53**, 109—124; сер. 3, **1**, 327—384), тем, что он не опирается на понятие прямого произведения банаховых пространств (cross-space) и, кроме того, приспособлен для непосредственного его применения. *R. Sikorski*

**353 К. Введение в абстрактный гармонический анализ. Лумис** (An introduction to abstract harmonic analysis. Loomis Lynn H.), X + 190 pp., D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, New York, London, 1953 (англ.)

Центральной частью реферируемой книги является построение гармонического анализа на локально бикомпактных коммутативных группах на основании теории И. М. Гельфанда коммутативных нормированных колец и изложение этой теории в требуемом для такого построения разрезе.

В первых двух главах приводятся с полными доказательствами необходимые для дальнейшего факты теории топологических и нормированных пространств, при этом основное внимание уделено изучению бикомпактных и локально бикомпактных пространств и пространства линейных функционалов. В главе 3, также носящей вспомогательный характер, изложена теория интегрирования на абстрактном пространстве. Изложение основывается на понятии интеграла Даниэля, что позволяет на 19 страницах изложить ряд основных фактов теории интегрирования, включая теоремы Радона — Никодима и Фубини.

Центральная часть главы 4 посвящена изложению теории И. М. Гельфанда коммутативных нормированных колец (банаховых алгебр в терминологии американских авторов) примерно в объеме основной части статьи И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова по нормированным кольцам (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 2 (12), 48—146). Изложение излишне усложнено рассмотрением колец без единицы (как известно, единицу всегда можно формально присоединить); в остальном оно мало-

отличается от изложения указанной статьи. Здесь же приведена теорема Г. Е. Шилова о кольцевой границе. Первые параграфы главы 4 посвящены некоторым сравнительно элементарным фактам теории некоммутативных нормированных колец. В первом параграфе главы 5 приведены некоторые факты теории регулярных коммутативных колец, а во втором — основные результаты теории коммутативных колец с инволюцией. Здесь же приведены теорема об интегральном представлении положительного функционала в симметричном коммутативном кольце без радикала, названная автором теоремой Герглотца — Бохнера — Вейля — Райкова, и данное Годеманом (Godement R., Ann. Math., 1951, 53, № 1, 68—124) обобщение теоремы Планшереля на такие кольца. Последний параграф главы 5 посвящен изложению теории Эмброза нормированных (вообще говоря, некоммутативных) колец, являющихся одновременно гильбертовыми пространствами ($H^*$-алгебры).

Дальнейшие три главы книги в основном посвящены приложению нормированных колец к теории непрерывных групп. В главе 6 излагается теория меры Хаара в локально бикомпактной группе. Приводится доказательство А. Вейля существования меры Хаара и доказательство ее единственности, весьма близкое к доказательству Д. А. Райкова (Докл. АН СССР, 1942, 34, № 8, 231—233). Здесь же выясняется связь между представлениями группы и ее группового кольца операторами в банаховом пространстве. В следующей главе строится теория характеров коммутативных локально бикомпактных групп на основании теории нормированных колец. Из упомянутой выше теоремы Герглотца — Бохнера — Вейля — Райкова выводится теорема об интегральном представлении положительно определенной функции на такой группе (доказательство этой теоремы, использующее понтрягинскую теорию строения коммутативных локально бикомпактных групп, было получено также А. Я. Повзнером в 1940 г. независимо от А. Вейля; см. Повзнер А. Я., Докл. АН СССР, 1940, 28, № 4, 294—295). Далее, из упомянутого ранее обобщения Годемана теоремы Планшереля на кольца, выводится, полученная независимо А. Вейлем, М. Г. Крейном и Д. А. Райковым, теорема Планшереля для коммутативных групп. При помощи метода Д. А. Райкова автор выводит принцип двойственности Л. С. Понтрягина из теоремы Планшереля. В этой же главе приводятся обобщения на рассматриваемые группы теоремы Стоуна об однопараметрической группе унитарных операторов, тауберовой теоремы Винера, формулы суммирования Пуассона и некоторых других фактов гармонического анализа. В главе 8 по-новому, на основании теории $H^*$-алгебр Эмброза, излагается классическая теория представлений бикомпактных групп матрицами. В последнем параграфе этой главы автор намечает новый подход к теории почти периодических функций на топологической группе, использующий теорию коммутативных нормированных колец и теорию представлений бикомпактных групп.

Последняя глава является кратким (и неполным) резюме неизложенных в этой книге вопросов по обобщенному гармоническому анализу. В конце главы кратко описывается идея принадлежащего Б. М. Левитану и А. Я. Повзнеру построения гармонического анализа относительно операторов обобщенного сдвига, порожденных уравнением Штурма — Лиувилля на полуоси.

Литературные ссылки часто не полны и не всегда точны. *Ю. М. Березанский*

**354 Д. Разложение регулярных представлений унимодулярной группы на неприводимые унитарные. Сульдин А. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. гос. ун-т, Казань, 1954

**355 Д. Некоторые свойства монотонных операций в абстрактных пространствах. Ширяева Е. В.** Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., Казанск. гос. ун-т, Казань, 1954

**См. также:** 156, 331, 434

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**356. Вероятностная теория простой карточной игры. Керкпатрик** (Probability theory of a simple card game. Kirkpatrick Paul), Math. Teacher, 1954, 47, № 4, 245—248 (англ.)

**357. Задачи о выпинании. Дюфрен** (Problèmes de dépouillements. Dufresne Pierre), C.r. Acad. sci., 1954, 238, № 1, 42—44 (франц.)

Пусть из урны, содержащей $a_1$ шаров сорта $A_1$, $a_2$ шаров сорта $A_2$, ..., $a_n$ шаров сорта $A_n$, поочередно, случайным образом, вынимаются шары вплоть до опустошения урны. Автор приводит, без вывода, решение нескольких элементарных задач, связанных с этой урновой схемой. Находится, например, вероятность того, что в течение всего процесса разность между числом шаров сорта $A_1$ и числом шаров сорта $A_2$ будет больше заданного числа $m$, вероятность того, что в течение всего процесса и при всех $i$ число шаров сорта $A_i$ будет не меньше числа шаров сорта $A_{i+1}$ и т. п.

*Р. Л. Добрушин*

**358. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. Колмогоров А. Н.,** Вестн. Моск. ун-та, 1953, № 10, 29—38

Обзор некоторых новых направлений в исследованиях по предельным теоремам для сумм независимых случайных величин и величин, связанных в цепь Маркова. В развитии этих направлений сыграло большую роль предложенное автором понятие сходимости распределений по вариации, т. е. в смысле расстояния $\rho_1(P_1, P_2) = \sup_A |P_1(A) - P_2(A)|$, где $A$ пробегает основную борелевскую систему множеств.

В § 1 показывается, что для всякого $N$ существует $\delta > 0$ такое, что любые два распределения $P_1$ и $P_2$, для которых $\rho_1(P_1, P_2) < \delta$, практически неразличимы посредством $N$ наблюдений. Это дает право считать сходимость распределений в смысле метрики $\rho_1$ наиболее сильной среди всех сходимостей, имеющих прямой теоретико-вероят-

ностный смысл. Исследуются связи между сходимостью по вариации и другими видами сходимости, встречающимися в теории вероятностей.

В § 2 рассматривается следующая задача. Пусть $K_n$ — класс распределений вероятностей для сумм $\xi_1 + \cdots + \xi_n$, где слагаемые образуют однородную цепь Маркова, подчиненную тем или иным дополнительным условиям. Требуется построить возможно более узкое семейство распределений $K'$ так, чтобы при $n \to \infty$ $\sup_{P \in K_n} \rho_1(P, K') \to 0$.

Эта задача была решена Р. Л. Добрушиным (РЖМат, 1954, 3017) для случая, когда величины $\xi_n$ принимают лишь два значения 0 и 1. Еще более специальный случай разобран Ю. В. Прохоровым (РЖМат, 1953, 1268).

В § 3 указываются связи между сходимостью распределений по вариации и локальными предельными теоремами.

§ 4 посвящен вопросу об оценке остаточных членов.

Библиография, 16 названий. *Е. Б. Дынкин*

**359. Законы больших чисел для случайных величин, принимающих значения в пространстве Банаха. Форте, Мурье** (Lois des grands nombres pour des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach. Fortet Robert, Mourier Édith), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 1, 18—20 (франц.)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \ldots$ — независимые случайные величины со значениями из банахова пространства $R$ и пусть $M\xi_i = 0$, $M(\|\xi_i\|^\alpha) < \infty$, где $\alpha > 1$. На пространство $R$ накладываются некоторые условия, которые, в частности, выполнены для всех пространств $L_\alpha$ при $\alpha \geqslant 2$. Исследуется асимптотическое поведение $M\left(\left\|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right\|^\alpha\right)$ при $n \to \infty$. Утверждается далее, что если для всех $i$ $M(\|\xi_i\|^2) < M$, то с вероятностью 1 $\left\|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right\| \to 0$ (аналогичное утверждение содержится в одной из более ранних публикаций авторов (C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 699—700), но там оно сформулировано при других предположениях, которые, как оказалось, являются недостаточными). В конце заметки приводятся некоторые дополнения к работе Мурье (РЖМат, 1953, 350), посвященной перенесению центральной предельной теоремы на величины со значениями из $R$. *Е. Б. Дынкин*

**360. Распределение радиальной ошибки. Уэйл** (The distribution of radial error. Weil Herschel), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 1, 168—170 (англ.)

Находится удобное для вычислений выражение для плотности вероятности величины $\zeta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, где $\xi$ и $\eta$ — независимые нормально распределенные случайные величины с неравными, вообще говоря, средними и дисперсиями. *Резюме автора*

**361. Теория экстраполирования и фильтрации случайных процессов. Яглом А. М.,** Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 1, 43—57

Дается обзор современного состояния проблемы экстраполирования, интерполирования и фильтрации стационарных и родственных им случайных процессов.

Выписываются несколько новых, не встречавшихся ранее в литературе формул, связанных с решением указанной проблемы. Библиография, 33 названия. *М. С. Пинскер*

**362. Стационарные процессы и гармонический анализ. Кавата** (Stationary process and harmonic analysis. Kawata Tatsuo), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 2, 41—60 (англ.)

Обзорная статья. Излагаются с полными доказательствами некоторые результаты спектральной теории стационарных случайных процессов. *М. С. Пинскер*

**363. О винеровской теории предсказания. Кавата** (On Wiener's prediction theory. Kawata Tatsuo), Rep. Statist. Appl. Res. Union Japan. Sci. Eng., 1953, **2**, № 4, 120—129 (англ.)

Популярная статья.

**364. Работы Рихарда фон-Мизеса по теории вероятностей и статистике. Крамер** (Richard von Mises' work in probability and statistics. Cramer Harald), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 657—662 (англ.)

Приведена выборочная библиография 48 названий.

**365 К. Геометрическая вероятность. Сфредда** (Probabilità geometriche. Sfredda Carduccio, 48 pp., Stamp. C. Tamburini, Milano, 1953), Ricerca scient., 1954, **24**, № 3, 664 (библ.)

**366 Д. Об одном классе стохастических матриц. Мустафин Х. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1954

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**367. О предельном распределении крайнего ранга. Гартштейн Б. Н.,** Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. матем.-физ., 1953, **22**, № 5, 50—71

Рассматривается $n$ независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиненных закону распределения $F(x)$, и составляется вариационный ряд из этих величин

$$\xi_1^{(n)} \leqslant \xi_2^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant \xi_n^{(n)}.$$

Изучается вопрос о совокупности возможных типов предельных распределений (при соответствующей нормировке) случайной величины $\rho_{rk}^{(n)} = \xi_k^{(n)} - \xi_r^{(n)}$ $(r < k)$, называемой рангом порядка $(r, k)$, в предположении что $r$ и $n - k$ остаются постоянными. Сходимость к предельному распределению понимается как сходимость в каждой точке непрерывности последнего.

Доказывается следующая теорема:

Если $r$ и $n - k$ постоянны, а функция распределения $F(x)$ такова, что предельные распределения $k$-го и $n - r + 1$-го членов вариационного ряда существуют, то класс предельных распределений для ранга порядка $(r, k)$ состоит из функций рас-

пределения следующих типов:

$$\Phi_\alpha^{(r)}(z); \qquad \Psi_\alpha^{(r)}(z); \qquad \lambda^{(r)}(z);$$

$$\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad \lambda^{(n-k+1)}(z);$$

$$\Phi_\alpha^{(r)}(z) * \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(za); \quad \Psi_\alpha^{(r)}(z) * \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(az);$$

$$\lambda^{(r)}(z) * \lambda^{(n-k+1)}(az);$$

здесь $\alpha$ и $a$ — положительные постоянные, знак $*$ обозначает операцию компонирования, а $\Phi_\alpha^{(m)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(m)}(z)$, $\lambda^m z$ суть единственно возможные предельные типы для распределения $m$-го члена вариационного ряда (см., например, Смирнов Н. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, **25**, 52, 56). Приводятся примеры, свидетельствующие о том, что все вышеуказанные предельные типы реализуются.

Эти результаты обобщают работы автора о совокупности предельных типов распределения $\rho_{1n}$ (Докл. АН СССР, 1948, **60**, № 7, 1119—1121).

Опечатки: 1) на стр. 54 в формуле (5) вместо

$$F^{r-1}(a_n(z+x)+b_n'') \text{ и } [1-F(a_n x - b_n')]^{n-l}$$

следует читать

$$F^{r-1}(a_n x - b_n') \text{ и } [1-F(a_n(z+x)+b_n'')]^{n-l};$$

2) На стр. 62 в формуле (20) следует переменить местами пределы $\infty$ и $A$. *Б. В. Финкельштейн*

**368. Точное распределение $T$-статистики для проверки наличия «тренда» и соответствующее нормальное приближение. Терпстра** (The exact probability distribution of the $T$ statistic for testing against trend and its normal approximation. Terpstra T. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 433—437; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 433—437 (англ.)

Пусть

$$x_{i,h}\left(i=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ h=1,\ 2,\ \ldots,\ n_i;\ \sum_{i=1}^{l} n_i = N\right)$$

— результаты наблюдений над независимыми непрерывно распределенными случайными величинами $\xi_{i,h}$, причем величины $\xi_{i,h}$ при $h \leqslant n_i$ распределены так же, как $\xi_i$. Для проверки гипотезы $H_0$, состоящей в том, что все $\xi_i$ имеют одну и ту же функцию распределения, при противоположной гипотезе $H_1$, состоящей в том, что случайные величины обладают «направленным смещением», определяемым неравенством

$$\sum_{i<j} \varepsilon_{ji} > 0,$$

где $\varepsilon_{j,i} = 2P(\xi_i < \xi_j) - 1$, используется статистика

$$\mathbf{T} = \sum_{i<j} \mathbf{U}_{i,j},$$

где $\mathbf{U}_{i,j}$ есть число пар $(h,\ k)$, $h \leqslant n_i$, $k \leqslant n_j$, с $i<j$ и $x_{i,h} < x_{j,k}$.

Статистика $\mathbf{T}$ для больших $n_i$ распределена асимптотически нормально.

Для $P_{n_1,\ldots,n_l}(T) = P\{\mathbf{T} = T \mid H_0;\ n_1,\ \ldots,\ n_l\}$ установлено рекуррентное соотношение, которое затем используется при составлении таблиц.

Приведены таблицы функции распределения $F_{n_1,n_2,n_3}(T)$ для трех выборок в случае $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant 5$.

Приведены значения $T_\alpha$, соответствующие $\alpha = 0{,}005;\ 0{,}01;\ 0{,}025;\ 0{,}05;\ 0{,}1$; где $T_\alpha$ — наименьшее целое $T$, для которого

$$1 - F_{n_1,n_2,n_3}(T-1) \leqslant \alpha.$$

Сравнение со значениями $T_\alpha'$, вычисленными по соответствующему нормальному приближению, показывает удовлетворительное совпадение.

*Е. Л. Рвачева*

**369. О $\chi^2$-критериях для взвешенных выборок. Аояма** (On the chi-square test for weighted samples. Aoyama Hirojiro), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1953, **5**, 25—28 (англ.)

**370. Статистика и теория вероятностей. Барбери** (Statistica e calcolo delle probabilità. Barberi Benedetto), Statistica, Bologna, 1953, **13**, 139—162 (итал.)

**371 РЕЦ. Элементарные принципы статистики. Росандер** (Elementary principles of statistics. Rosander A. C., X+693 pp., D. Van Nostrand, New York; Macmillan, London, 1951, 45 s.) [**Рецензия: Сандон** (Sandon Frank), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 237—239 (англ.)]

**372 РЕЦ. Статистическое планирование и анализ экспериментов для научных исследований. Виллярс** (Statistical design and analysis of experiments for development research. Villars Donald Statler, XVII + 455 pp., 1951, 6.50 doll.) [**Рецензия: Сампфорд** (Sampford M. R.), Nature, 1954, **173**, № 4399, 327 (англ.)]

**373 РЕЦ. Введение в статистику. Юл, Кендалл** (An introduction to the theory of statistics. Yule G. Udny, Kendall M. G., 14 ed., XXIV + 701 pp., Hafner Publ. Co., New York, 1950, 7.50 doll.) [**Рецензия: Кертисс** (Curtiss J. H.), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 54—56 (англ.)]

**374 Д. О критериях согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. Королюк В. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1954

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

**375. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.,** Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 4, 375—391

Выписываются формулы, выражающие через моментные функции случайного процесса $\xi(t)$ моментные функции процесса $\eta(t)$, связанного с $\xi(t)$ нелинейным соотношением вида

$$\eta(t) = a_0 + a_1\xi(t) + a_2[\xi(t)]^2 + \ldots + a_n[\xi(t)]^n$$

или же более общего вида

$$\eta(t) = a_0(t) + \int a_1(t, \tau_1)\, \xi(\tau_1)\, d\tau_1 + \\ + \iint a_2(t, \tau_1, \tau_2)\, \xi(\tau_1)\, \xi(\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 + \ldots + \\ + \int \ldots \int a_n(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\, \xi(\tau_1)\, \xi(\tau_2) \ldots \\ \ldots \xi(\tau_n)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n. \quad (1)$$

Авторы пытаются доказать, что каждое нелинейное преобразование процесса $\xi(t)$ может быть с любой степенью точности аппроксимировано преобразованием вида (1).

Обсуждается вопрос о выборе функций $a_1(t, \tau)$, $a_2(t, \tau_1, \tau_2)$ и т. д. в случае двух конкретных нелинейных преобразований, часто встречающихся на практике: преобразования, осуществляемого системой из нелинейного детектора, соединенного с простейшим линейным фильтром (описываемым дифференциальным уравнением первого порядка), и преобразования, осуществляемого в следящей системе, содержащей нелинейный элемент. *А. М. Яглом*

**376. Расчет систем прерывистого регулирования при наличии стационарных случайных воздействий. Цыпкин Я. З.,** Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 4, 353—374

Указывается, что ряд практических задач, связанных с работой систем прерывистого регулирования, сводится к следующей математической задаче: требуется сделать возможно меньшей величину $\overline{\varepsilon^2[n]} = \overline{(u_0[n] - u_2[n])^2}$, где черта сверху служит символом осреднения, $u_0[n]$ — заданная стационарная случайная последовательность, а $u_2[n]$ — стационарная последовательность, получаемая из другой заданной последовательности $u_1[n] = u_c[n] + u_п[n]$ ($u_c[n]$ — сигнал, $u_п[n]$ — помеха) при прохождении последней через линейную систему; известными считаются все корреляционные функции и взаимные корреляционные функции последовательностей $u_0[n]$, $u_c[n]$, $u_п[n]$. Сформулированная задача — это задача о фильтрации стационарных случайных последовательностей, рассматривавшаяся в литературе (Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949; Яглом А. М., Успехи матем. наук, 1952, **7**, № 5 (51), 3—168)

Подробно излагаются основные понятия теории стационарных случайных последовательностей (включая вывод формулы, выражающей $\overline{\varepsilon^2[n]}$ через спектральные плотности и взаимные спектральные плотности последовательностей $u_0[n]$, $u_c[n]$, $u_п[n]$ и частотную характеристику системы, преобразующей $u_1[n]$ в $u_2[n]$); после этого приведено решение задачи о фильтрации при известных значениях $u_1[n]$ во все моменты времени (т. е. без учета условия физической реализуемости системы) и даны ссылки на уже упоминавшиеся работы Винера и А. М. Яглома, содержащие решение с учетом этого условия. В заключение подробно разбирается одна конкретная практически важная система прерывистого регулирования и при определенных предположениях о статистических характеристиках сигнала и помехи рассчитываются значения параметров этой системы, дающие наименьшее значение $\overline{\varepsilon^2[n]}$. *А. М. Яглом*

**377. Отрыв и излом металлов с точки зрения теории стохастических процессов. Йокобори** (Failure and fracture of metals from the standpoint of the stochastic theory. Yokobori Takeo), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 1, 104—106 (англ.)

Рассматривается простейший стохастический процесс, приводящий к вероятности $p(t) = \exp\left(-\int_0^t m(t)\, dt\right)$ для ненаступления отрыва или излома испытываемого образца в течение промежутка $(0, t)$; $m(t)\, dt$ — вероятность наступления этого события в интервале $(t, t + dt)$. Для различных типов отрыва или излома интерпретируется физический смысл функции $m(t)$; при некоторых добавочных предположениях получены кривые распределения прочности. *Н. В. Смирнов*

**378. Применение теории вероятностей в телефонии. Ливовский** (Aplicarea calculului probabilităţilor in telefonie. Livovschi L.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 9, 395—409 (рум.)

**379. Теория вероятностей с приложениями к баллистике. Бес** (Calcul des probabilités et applications à la balistique. Besse M. L.), Mém. artill. franç., 1953, **27**, № 103, 99—129; № 104, 349—471 (франц.)

Третья и четвертая части обширной работы, представляющей собой приложение к курсу внешней баллистики, читаемому автором во Французской высшей школе вооружения (первые две части см. Mém. artill. franç., 1952, **26**, № 100, 381—476; № 102, 923—1003; РЖМех, 1954, 2829).

**380 К. Применение математической статистики в технике, в частности, в гидрологических исследованиях. Силадьи** (Matematikai statisztika alkalmazása a müszaki gyakorlatban, különös tekintettel a hidrológiai kutatásra. Szilágyi Gyula, 155 l., Budapest, 1953, 16. 50 Ft.); Magyar nemzeti bibliogr., 1953, № 6, 213 (библ.)

---

См. также: 2, 3, 338, 456 РЕЦ

## ГЕОМЕТРИЯ

**381. Задача о трех биссектрисах** (The problem of the three bisectors. N. A. C.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 218—219 (англ.)

Сообщаются исторические сведения и результаты, относящиеся к задаче: построить треугольник, если даны длины его биссектрис. Задача имеет обманчивую близость с задачами о построении треугольника по трем высотам или медианам, но она гораздо сложнее. Причину этого объяснил О. Теркем (1842 г.), выразив длины внутренних биссектрис в функции сторон. Это дает путь для аналитического решения задачи, однако приводит к уравнению высокой степени.

П. Барбарен установил (1896), что задача приводит к уравнению 14-й степени, если биссектрисы пересе-

каются в одной точке, и 16-й степени, если они образуют треугольники. Эти уравнения, вообще говоря, неприводимы, и задача неразрешима циркулем и линейкой. *Н. М. Бескин*

**382. Обращение теорем о фундаментальных метрических соотношениях в прямоугольных треугольниках. Барбэлат** (Reciprocele teoremelor relative la relaţiile metrice fundamentale în triunghiurile dreptunghice. Barbălat I.), Rev. mat. şi fiz., 1953, 4, № 2, 25—31 (рум.)

Статья содержит несколько простых теорем элементарной геометрии и предназначена для школьников старших классов и преподавателей математики. *В. Г. Болтянский*

**383. Теорема о пятиугольнике. Вильямс** (A pentagon theorem. Williams W. L.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 9, 616—617 (англ.)

Пятиугольник разбивается диагоналями на треугольники, между площадями которых устанавливается определенная зависимость. Учитывая, что пятиугольник можно вписать в коническое сечение, автор считает полученную зависимость схожей с зависимостью между диагоналями и сторонами вписанного в круг четырехугольника (теорема Птолемея). *С. И. Зетель*

**384. Объем и поверхность крестовины и шара. Финслер** (Volumen und Oberfläche von Kreuzkern und Kugel. Finsler Anne), Elem. Math., 1954, 9, № 2, 36—39 (нем.)

На основе принципа Кавальери находятся величины объемов крестовины — выпуклого тела, служащего общей частью двух цилиндров равного радиуса с перпендикулярно пересекающимися осями, и купола — наименьшего выпуклого тела, которое содержит фигуру, образованную многоугольником, точкой $S$ вне его плоскости и частями эллипсов, соединяющих точку $S$ с вершинами многоугольника и имеющих своей общей полуосью отрезок перпендикуляра от точки $S$ до плоскости многоугольника.

Объем шара находится как предел объемов купола. Площадь поверхности крестовины находится как предел отношения объема слоя, покрывающего крестовину, к толщине слоя, когда последняя стремится к нулю. *И. В. Цыганков*

**385. «Максимум и минимум» Ж. А. Томмазини. Конте** (Dal «De maximis et minimis» di J. A. Tommasini. Conte Luigi), Archimede, 1953, 5, № 4—5, 213—214 (итал.)

Приводятся геометрические доказательства двух теорем из классической книги Томмазини (Tommasini J. A., De maximis et minimis ad institutiones geometricas accomodatis specimen, Pisis, 1774).

1. Из всех треугольников с данным по положению и величине основанием и вершиной, лежащей на данной прямой $AB$, наименьший периметр имеет треугольник, боковые стороны которого образуют с прямой $AB$ равные углы.

2. Из всех треугольников с равными углами при вершине и общей высотой, опущенной на основание, равнобедренный имеет наименьшее основание, наименьшую сумму боковых сторон, следовательно, наименьший периметр и наименьшую площадь.

Из доказанных теорем получается ряд следствий. *С. И. Зетель*

**386. Некоторые формы уравнения конического сечения. Голднер** (Some forms for the equation of a conic. Goldner F. M.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 36—37 (англ.)

Рассматривается общее уравнение конического сечения, записанное в однородных координатах, и выводятся новые формы записи этого уравнения в специальных обозначениях, введенных автором. *В. И. Ведерников*

**387 РЕЦ. Передовые идеи Лобачевского — оружие борьбы против идеализма в математике. Яновская** (Idee Łobaczewskiego w walce z idealizmem w matematyce. Janowska Zofia, 88s., Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1953, 10 zł.) [**Рецензия: Корчовский** (Korczowski Henryk), Matematyka, 1953, 6, № 6, 48—49 (польск.)]

**388 РЕЦ. Аналитическая геометрия. Пиккерт** (Analytische Geometrie. Pickert G., 400 pp., 76 fig., Geest et Portig édit., Leipzig, 1953) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 11—12, 374—375 (франц.)]

## ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**389 Д. Представление федоровских пространственных групп симметрии конечными фигурами, заполняющими пространство. Башкиров Н. М.** Автореф. дисс. канд физ.-матем. н., Ин-т кристаллогр. АН СССР, М., 1954

**390 Д. Основы аналитической теории механизмов. Морошкин Г. Ф.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

## ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**391. Геометрическое истолкование теории бинарной квадратичной формы. Губа Е. Д.**, Уч. зап. Сталингр. пед. ин-та, 1953, № 3, 62—70

Указывается связь между геометрией плоскости Лобачевского и теорией инвариантов бинарной квадратичной формы. *Н. В. Ефимов*

**392. Единственность проективной плоскости с пятьюдесятью семью точками. Холл** (Uniqueness of the projective plane with 57 points. Hall Marshall Jr.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 912—916 (англ.)

Доказывается, что любая проективная плоскость с восемью точками на каждой прямой (всего 57 точек) является дезарговой. Подсчитав число прямых возможных типов, автор доказывает, что в этой плоскости не может иметь места конфигурация Фано, что и доказывает теорему. *Л. Я. Березина*

**393. Об уравнении инцидентности точки и прямой в неассоциированных проективных координатах. Цесарец** (O jednadžbi incidencije točke i pravca u projektivnim nezdruženim koordinatama. Cesarec Rudolf), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 3, 168—174 (хорв.; резюме нем.)

Автор определяет проективные координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ точки $P$ на проективной плоскости по формуле $x_i : x_j = (PE n_i n_j)$ с помощью трех базисных прямых $n_1$, $n_2$, $n_3$, не проходящих через одну точку, и «единичной точки» $E$, не лежащей на этих прямых: $(PE n_i n_j)$ — двойное отношение точек $P$, $E$ и прямых $n_i$, $n_j$. Проективные координаты $u_1$, $u_2$, $u_3$ прямой $g$ на той же плоскости определяются по аналогичной формуле $u_i : u_j = (gf M_i M_j)$ с помощью трех точек $M_1$, $M_2$, $M_3$, не лежащих на одной прямой, и «единичной прямой» $f$, не проходящей через эти точки. Обозначим точки пересечения прямых $n_2$, $n_3$; $n_3$, $n_1$; $n_1$, $n_2$ соответственно через $N_1$, $N_2$, $N_3$. В том случае, когда $M_i \equiv N_i$ и $(EM_i f n_i) = -1$, автор называет системы координат $x_i$ и $u_i$ ассоциированными. Условие инцидентности точки $P$ и прямой $g$ при этом имеет вид $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. В том случае, когда системы координат $x_i$ и $u_i$ не являются ассоциированными, для определения второй из них по первой нужно задать координаты точки $M_i$ и уравнение прямой $f$. Автор обозначает координаты точек $M_1$, $M_2$, $M_3$ соответственно через $a_i$, $b_i$, $c_i$, а уравнение прямой $f$ записывает в виде $f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0$. Доказывается, что в этом случае условие инцидентности точки $P$ и прямой $g$ имеет вид

$$u_1 \cdot (af)(xbc) + u_2 \cdot (bf)(xca) + u_3 \cdot (cf)(xab) = 0,$$

где $(af) = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ и т. д., а $(xbc)$ — определитель, составленный из координат $x_i$, $b_i$, $c_i$ и т. д. *Б. А. Розенфельд*

**394. Кривизна ортогональной сетки Гаусса—Крюгера в многогранной проекции. Арнольд** (Gauß-Krügerschen Gitternetzlinien in der Polyederprojektion. Arnold K.), Vermessungstechnik, 1954, **2**, № 4, 71—73 (нем.)

Рассматривается изображение части земного эллипсоида на листе карты в многогранной проекции; но при этом считается, что на этом же листе (или на краях листа) нанесена ортогональная сетка Гаусса—Крюгера, линии которой $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ лишь приближенно можно считать здесь прямыми линиями. Для масштаба 1 : 50 000 выведены приближенные формулы для кривизны линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Проведены числовые расчеты для широты $= 52°$, которые показывают, что при размерах листа $|\Delta\lambda| < 10°$ ($\lambda$ — долгота) и $|\Delta\varphi| < 6°$ линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ с практически достаточной точностью можно принимать за прямые линии. При $|\Delta\lambda| \geqslant 10°$ только линии $y = \text{const}$ будут заметно искривляться. *В. И. Ведерников*

**395. Эквивалентные формы аксиомы о параллельных. Бант** (Equivalent forms of the parallel axiom. Bunt L. N. H.), Euclides, 1953, Groningen 28, 249—267 (голл.)

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 3, 245.

**396 К. Начертательная геометрия и черчение. Зеленин Е. В.** Изд. 2-е, переработанное, 524 стр., 4 вкладки, Гостехиздат, М., 1953, 16 р. 35 к.

Книга является учебным пособием для средних и высших технических учебных заведений.

Первая часть книги посвящена геометрическому черчению. Вторая часть (начертательная геометрия) состоит из следующих глав: общие сведения о проекциях, точка, прямая, плоскость, взаимное расположение прямых и плоскостей, проекции геометрических тел, расположение проекций в черчении, определение натуральных величин, пересечение поверхности многогранника проектирующей плоскостью, пересечение поверхностей тел вращения дважды проектирующей плоскостью, пересечение поверхности тел вращения проектирующей плоскостью, следы прямой на поверхности геометрических тел, пространственные линии, винтовая поверхность, пересечение поверхностей тел, сечения и разрезы, аксонометрия (наглядные изображения). Третья часть содержит машиностроительное черчение. Четвертая — элементы строительного чертежа. Приложение — техническое рисование. *Н. Ф. Четверухин*

**397 Д. К вопросу определения линий пересечения двух поверхностей. Луньков А. П.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1954

**398 К. Черчение в анаглифических проекциях. Айрапетян С. С.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Груз политехн. ин-т, Ереван, 1954

**399 Д. Методы решения задач на пересечение тел плоскостями. Талаквадзе Т. В.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Груз. политехн. ин-т, Тбилиси, 1954

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**400. Бирациональное преобразование, определенное, исходя из гиперповерхности комплексного $S_r$, для разложения ее особенностей. Спампинато** (Trasformazione birazionale determinata da una ipersuperficie dell' $S_r$ complesso per lo scioglimento delle sue singolarità. Spampinato Nicolò), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 113—122 (итал.)

**Эффективное определение бирационального преобразования, преобразующего данную в $S_r$ гиперповерхность в многообразие в $S_{r^2+r}$, не имеющее кратных точек. Спампинато** (Effettiva determinazione di una trasformazione birazionale trasformante una data ipersuperficie dell' $S_r$ in una varietà dell' $S_{r^2+r}$ priva di punti multipli. Spampinato Nicolò), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 123—152 (итал.)

Во второй из реферируемых работ строится бирациональное преобразование, переводящее неприводимую гиперповерхность $F$ $r$-мерного пространства в многообразие $(r^2 + r)$-мерного пространства, не имеющее кратных точек. Если уравнение $F$ задается в однородных координатах в виде

$$f(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0,$$

где $f$ — форма, и $D = \partial f / \partial x_{r+1}$,

$$E = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + x_{r-1} \frac{\partial f}{\partial x_r} + x_r \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

($D$ и $E$ следует считать не обращающимися на $F$ тождественно в нуль), то уравнения указанного преобразования будут:

$$(T_r)\qquad \begin{aligned} \rho_{k(r+1)+j} &= x_j x_{r+1}^{r-1-k} D^{r-k} E^k, \\ \rho_{r^2+r+1} &= E^r, \end{aligned}$$

где $k = 0, \ldots, r-1$; $j = 1, \ldots, r+1$ (в правых частях формул на стр. 149 выпал индекс $j$). Выкладки проводятся с большой подробностью для каждого из случаев $r = 2, 3, 4$ и очень кратко для общего случая. Основные результаты, касающиеся структуры преобразования $T_r$ и некоторых его свойств, также предварительно формулируются для каждого из случаев $r = 2, 3, 4$, причем соответствующие теоремы представляют почти буквальное повторение одна другой.

Первую работу, как указывает сам автор, следует рассматривать как предварительную заметку. Будучи помещена непосредственно перед второй, она вкратце воспроизводит результаты последней, сначала для случаев $r = 2, 3$, а затем для общего случая. *В. В. Морозов*

**401. Расширения и ассоциированные смещения в аналитическом поле.** Сегре Б. (Dilatazioni e comportamenti associati nel campo analitico. Segre Beniamino), Rend. circ. mat. Palermo, 1952, сер. 2, 1, 373—379 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Недавно (Ann. mat. pura ed appl. 1952, (4), **33**, 5—48) автором изучались бирациональные преобразования алгебраических многообразий (расширения) и было введено понятие ассоциированного смещения некоторой алгебраической гиперповерхности относительно другой. Здесь автор обобщает понятие расширения и ассоциированного смещения на дифференциальное поле. Если $U$ — аналитическое многообразие измерения $\nu+1$ ($\nu \geqslant 1$) и $O$ — его простая точка, то $U$ можно униформизировать в окрестности $O$, выразив координаты ее точек как голоморфные аналитические функции $\nu+1$ неоднородных параметров $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$, равных нулю в точке $O$. Величины $x$ определены только с точностью до некоторого регулярного аналитического преобразования. Любая гиперповерхность (аналитическая) $V$ из $U$, проходящая через $O$, представится теперь уравнением $f(x) = 0$, где $f(x)$ — голоморфная функция всех $x$, определенная в окрестности $(0, 0, \ldots, 0)$ и равная нулю в этой точке. В такой окрестности $f(x)$ записывается в виде сходящегося степенного ряда (1)

$$f(x) = \varphi_m(x) + \varphi_{m+1}(x) + \ldots, \quad (m \geqslant 1),\ \varphi_m(x) \not\equiv 0,$$

где через $\varphi_k$ обозначена форма от $x$ степени $k$. Число $m$ не зависит от выбора величин $x$ и является кратностью $V$ в точке $O$. Аналитическое многообразие $T$, вложенное в $U$ и проходящее через $O$, являющуюся его простой точкой, при подходящем выборе параметров $x$ будет определяться уравнениями $x_0 = x_1 = \ldots = x_{\nu-t} = 0$, где $t$ — размерность $T$ ($0 \leqslant t \leqslant \nu$). При $t < \nu$ можно подвергнуть $U$ расширению на базе $T$ следующим образом: $U$ преобразуется в регулярное аналитическое многообразие $U'$ того же измерения $\nu+1$, так что точки $U$, расположенные вблизи $O$, но не лежащие на $T$, отвечают регулярно и взаимно однозначно им соответственным в $U'$, тогда как каждая точка $P$ из $T$ имеет $\infty^{\nu-t}$ соответственных в $U'$, которые отвечают взаимно однозначно и непрерывно $\infty^{\nu-t}$ касательным в $P$ к $T$, $(t+1)$-мерным граням из $U$. Из двух аналитических гиперповерхностей $V$, $W$ из $U$, проходящих через $O$ и определяемых в окрестности $O$, соответственно уравнениями $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $W$ имеет в $O$ ассоциированное смещение индекса $r \geqslant 1$ относительно $V$ (что записывается $g(x) \sim \{f(x)\}_r$), если тождественно относительно всех $x$

$$g(x) = a(x) f(x) + \sum_{s \leqslant r} b_s(x)\, \omega^{(s)} f(x), \qquad (2)$$

где $a$, $b$ обозначают голоморфные относительно $x$ функции в окрестности $O(0, 0, \ldots, 0)$, $\omega^{(s)}$ обозначает некоторую произвольную операцию дифференцирования порядка $s$ относительно переменных $x$ и суммирование в правой части распространяется на получаемые таким путем члены $b_s \omega^{(s)} f$ для $s = 1, 2, \ldots, r$. Установленная так связь между $V$ и $W$ имеет внутренний характер. Если $W$ имеет в $O$ ассоциированное смещение индекса $r$ относительно $V$ и если $V$ имеет в $O$ точку кратности $m > r$, то кратность $W$ в $O$ получается не ниже $m - r$. При подходящем выборе величин $b$ эта последняя кратность равна как раз $m - r$; при этом условии ассоциированное смещение $W$ в $O$ является «регулярным». Для этого необходимо и достаточно, чтобы форма (степени $m - r$ от переменных $x$)

$$\sum b_r(0)\, \omega^{(r)} \varphi_m(x)$$

не исчезала тождественно.

Ассоциированное смещение данного индекса двух гиперповерхностей из $U$ в их общей точке $O$, простой для $U$, сохраняется при аналитических преобразованиях $U$, регулярных в окрестности $O$. Этого сохранения, вообще говоря, не будет, если подвергнуть $U$ расширению на базе, проходящей через $O$.

Основной результат статьи: Теорема I. Если гиперповерхность $V$ из $U$ имеет $m$-кратной точкой простую точку $O$ многообразия $U$, а гиперповерхность $W$ имеет в $O$ регулярное ассоциированное смещение индекса $r$ относительно $V$ ($1 \leqslant r \leqslant m$), то расширение $U$ на базе подмногообразия $T$ переведет $V$, $W$ в гиперповерхности $V'$, $W'$ так, что $W'$ будет иметь ассоциированное смещение индекса $r$ относительно $V'$ в точке $O'$, преобразованной из некоторой точки $O_1$ многообразия $U$, бесконечно близкой к $O$ и не лежащей на $T$.

При этом гиперповерхность $V'$ с необходимостью допускает в $O'$ кратную точку кратности $\leqslant m$. Для того, чтобы эта кратность достигала величины $m$, необходимо (но, вообще говоря, недостаточно), чтобы $\varphi_m(x)$ не зависела от $x_0$, а зависела лишь от $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu - t$). Из факта регулярности ассоциированного смещения $W$ в $O$ нельзя, вообще говоря, выводить регулярность ассоциированного смещения $W'$ в $O'$, однако если $V'$ проходит через $O'$ с кратностью $m$, то $W'$ имеет в $O'$ регулярное ассоциированное смещение индекса $r$ относительно $V'$. *С. Д. Россинский*

**402. Абстрактная алгебраическая геометрия и понятие алгебраического многообразия.** Бенедикти (La geometria algebrica astratta e il concetto di varietà algebrica. Benedicty Mario), Archimede, 1953, 5, № 4-5, 133—144 (итал.)

Статья обзорного характера. Она начинается с очерка, посвященного классической алгебраической геометрии и вкладу в эту область итальянской геометрической школы. Далее автор останавливается подробнее на таких ветвях абстрактной алгебры, как теория абстрактных тел, теория идеалов коммутативных колец, теория полей алгебраических функций и теория идеалов полиномов. После этого дается определение алгебраического многообразия как множества нулей полиномиального идеала, излагается понятие общей точки и специальной точки многообразия (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 2, Гостехиздат, М. — Л., гл. 13).

В заключение очерка указывается, что абстрактная алгебраическая геометрия намечает новые области исследований в алгебраической геометрии и выдвигает новые приемы для изучения проблем, поставленных классическими изысканиями и оставшихся нерешенными. *С. Д. Россинский*

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**403. Об одном предложении Риччи-Курбастро и о гауссовой кривизне минимальных поверхностей.** Пиль (Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gausssche Krümmung der Minimalflächen. Pinl Max), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 369—373 (нем.)

Известное в теории минимальных поверхностей предложение Риччи-Курбастро формулируется следующим образом: если $ds^2$ — элемент дуги минимальной поверхности с полной кривизной $K$, то квадратичная дифференциальная форма $ds^{*2} = \sqrt{-K}ds^2$ имеет нулевую полную кривизну (справедливо и обратное). Автор показывает, что это предложение эквивалентно существованию таких изотропных параметров на минимальной поверхности евклидова пространства $R_n$, $n \geqslant 3$, в которых ее гауссова кривизна принимает так называемую нормальную форму $K = -g_{12}^{-2}$ (формула Штуди), и строит пример минимальной поверхности евклидова четырехмерного пространства $R_4$, для которой теорема Риччи-Курбастро не выполняется. *А. Г. Дорфман*

**404. Новое построение кривизны поверхности в $R_3$.** Урбан (Druhý útvar křivosti plochy v $R_3$. Urban A.), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 1, 73—88 (чеш.)

Рассматривается неособая точка $B$ поверхности $V_2$ в обыкновенном $R_3$. В $D$-символике Ван-дер-Вардена — Бортолотти вводится тензор

$$H_{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{\varkappa} = D_{a_n} D_{a_{n-1}} \ldots D_{a_0} x^{\varkappa},$$

где $x^{\varkappa}$ — декартовы координаты в $R_3$ ($a = 1, 2$; $\varkappa = 1, 2, 3$). Вектор

$$v_n^{\varkappa} = i^{a_0} i^{a_1} \ldots i^{a_n} H_{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{\varkappa} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

общий для всех кривых, проходящих через точку $B$ и имеющих общий касательный вектор $i^a$, называется $n$-м вектором кривизны, принадлежащим направлению $i^a$. При $n = 0$ получаем касательный вектор, при $n = 1$ — вектор $v_1^{\varkappa} = N^{\varkappa}/R$, где $R$ — нормальная кривизна поверхности в направлении $i^a$, $N^{\varkappa}$ — единичный вектор нормали поверхности.

Выявляется связь между вторым вектором кривизны и направлениями Кодацци, Дарбу и асимптотическими направлениями. Определяется геометрическое место $g$ концов вторых векторов кривизны, начала которых помещены в точке $B$. $g$ есть центрально-симметрическая относительно точки $B$ кривая 6-го порядка, лежащая в общем случае на конусе 3-го порядка с вершиной в точке $B$.

В заключение вводятся псевдоасимптотические направления $n$-го порядка, $n$-й вектор кривизны которых лежит в касательной плоскости рассматриваемой точки, и показывается их связь с некоторыми другими направлениями на поверхности. В частности, для $n = 1$ получаются асимптотические направления, для $n = 2$ — направления Кодацци. *А. И. Сирота*

**405 РЕЦ. Лекции по геометрии. Т. 2, ч. 2. Кривые и поверхности.** Кампеделли (Lezioni di geometria, vol. 2, parte 2; Le curve e le superficie, Campedelli L., 2 edizione, CEDAM, Padova, 1953) [Рецензия Брусотти (Brusotti L.), Period. mat., 1953, 31, № 5, 318—319 (итал.)]

## ГЕОМЕТРИЯ $n$-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**406. Канонический вид полной внешней квадратичной дифференциальной формы.** Либерман (Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée. Libermann Paulette), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, № 10, 846—850 (франц.)

Уточняются предположения о дифференцируемости, лежащие в основе приведения к каноническому виду внешней квадратичной дифференциальной формы $\Omega$ класса $2n$, являющейся полным внешним дифференциалом и заданной в области $V_{2n}$ пространства $2n$ измерений. Именно, доказывается, что если в окрестности $U$ произвольной точки области $V_{2n}$ форма $\Omega$ записывается в виде $\sum a_{ij}[du^i du^j]$ (где величины $u^i$ образуют систему местных координат в $U$) с коэффициентами $a_{ij}(u)$, допускающими непрерывные частные производные первого порядка по $u^i$, то в некоторой окрестности $V \subset U$ можно найти такую систему местных координат $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, в которой форма $\Omega$ записывается в каноническом виде

$$\Omega = [dx^1 dy^1] + \ldots + [dx^n dy^n].$$

*М. А. Акивис*

**407. О группах аффинных преобразований аффинно-связных многообразий.** Номидзу (On the group of affine transformations of an

affinely connected manifold. Nomizu Katsumi), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 816—823 (англ.)

Группа всех аффинных преобразований полного пространства аффинной связности (т. е. пространства, характеризующегося возможностью продолжения всякой геодезической на сколь угодно большие значения канонического параметра), определенного на дифференцируемом многообразии, является группой Ли.

Группа изометрических преобразований риманова пространства является замкнутой подгруппой группы аффинных преобразований этого пространства. *И. П. Егоров*

**408. К теории связности. Независимый вывод тензорного характера системы символов кривизны. Кастольди** (Attorno alla teoria delle connessioni. Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura. Castoldi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 127—130 (итал.)

Доказательство тензорной природы системы символов $L_{ijh}^{\ \ k}$

$$L_{ijh}^{\ \ k} = 2\left(\partial_{[i}L_{j]h}^{\ \ k} + L_{[i|l|}^{\ \ k}L_{j]h}^{\ \ l}\right)$$

в пространстве аффиной связности $X_n$ с коэффициентами $L_{ij}^{k}$ основывается обычно на применении к произвольному векторному полю в $X_n$ формулы изменения порядка ковариантного дифференцирования.

Автор предлагает «независимое» доказательство, не требующее присоединения к $X_n$ посторонних объектов (например, векторных полей). Он рассматривает тем не менее в $X_n$, наряду со связностью $L_{ij}^{k}$, другую (симметричную) связность $\Gamma_{ij}^{k}$ и приходит к формуле

$$L_{ijh}^{\ \ k} = \Gamma_{ijh}^{\ \ k} + 2\overset{L}{\nabla}_{[i}D_{j]h}^{\ \ k} + 2D_{[i|h|}^{\ \ \ l}D_{j]l}^{\ \ k} + 2D_{[ij]}^{\ \ \ l}D_{lh}^{k}, \qquad (1)$$

где $D_{ij}^{k} = L_{ij}^{k} - \Gamma_{ij}^{k}$; $\Gamma_{ijh}^{\ \ k}$ — символы кривизны связности $\Gamma_{jk}^{i}$. Если положить в какой-либо системе координат $\Gamma_{ij}^{k} = 0$, то равенство $\Gamma_{ijh}^{\ \ k} = 0$ имеет место в любой системе координат и формула (1) обнаруживает тензорную природу $L_{ijh}^{\ \ k}$.

Действительно независимое доказательство тензорного характера символов кривизны (Римана — Христоффеля) дано В. Ф. Каганом в книге «Основы теории поверхностей», т. I, Гостехиздат, М., 1947, стр. 338—339. В статье имеются опечатки.

*Л. Л. Вербицкий*

**409. О римановом пространстве с разрывной метрикой. Ишии** (On the Riemannian space with a discontinuous metric. Ishii Yoshihito), Tensor, 1953, 3, 13—22 (англ.)

В работе изучается геометрия пространства, являющегося объединением двух римановых пространств с общей границей. Это пространство называется римановым пространством с разрывной метрикой. На общей границе определяется параллелизм векторов, дифференцирование тензоров и тензор кривизны путем обобщения соответственных понятий риманова пространства. Для двумерного случая выводится обобщенная формула Гаусса — Бонне. Более подробно изучаются свойства тензора кривизны, в частности, в том случае, когда пространство четырехмерно.

*A. Fialkow*

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 3, 253

**410. Обобщенная реономная геометрия $K$-протяжений. Тонооka** (Generalized rheonomic geometry of K-spreads. Tonooka Keinosuke). Tensor, 1953, 3, 26—39 (англ.)

Работа посвящена обобщению в двух направлениях геометрии $K$-протяжений, изучавшейся Дугласом (Douglas, Math. Ann., 1931, **105**, 707—733). В первом направлении обобщения система дифференциальных уравнений второго порядка заменяется уравнениями порядка $m > 3$; во втором направлении группа преобразований заменяется группой обобщенных преобразований

$$x^{i'} = x^{i'}(x, u), \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^{\alpha}) \qquad (1)$$

(латинские индексы изменяются от 1 до $n$, греческие индексы — от 1 до $K$).

Если $x^i = x^i(u^\alpha)$ — параметрические уравнения $K$-мерной поверхности, то совокупность функций

$$x^i(\alpha),\ p^i_{\alpha(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha_1}}, \ldots, p^i_{\alpha(m)} = \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\alpha_1}\ldots\partial u^{\alpha_m}} \qquad (2)$$

характеризуют элемент $m$-го порядка поверхности. В этих обозначениях геометрия $K$-протяжений высшего порядка может быть записана в виде

$$p^i_{\alpha(m)} + H^i_{\alpha(m)}(u^\beta, x^s, p^s_{\beta(1)}, \ldots, p^s_{\beta(m)}) = 0, \ m > 3. \qquad (3)$$

Автор начинает с указания законов преобразования функций (2) и вытекающего из него закона преобразований функций $H$, входящих в (3).

Остальная часть статьи в основном посвящена определению трехиндексных коэффициентов аффинной связности с помощью функций $H$. Эти коэффициенты могут иметь все латинские или все греческие индексы или же частично латинские, частично греческие индексы. Автор рассматривает $(n+K)$-мерное многообразие $X_{n+K}$ с координатами точек $x^1, \ldots, x^n, u^1, u^2, \ldots, u^K$.

Полагая для удобства $y^A = x^i$ $(A = 1, \ldots, n)$, $y^A = u^\alpha$ $(A = \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{K})$, автор рассматривает обобщенную реономную группу (1) как группу преобразований координат $y^{A'} = y^{A'}(y^A)$, где $\partial y^{A'}/\partial y^A = \partial x^{i'}/\partial x^i$ $(A' = i',\ A = i)$, $= \partial x^{i'}/\partial u^\alpha$ $(A' = i',\ A = \alpha)$, $= 0$ $(A' = \alpha',\ A = i)$, $= \partial u^{\alpha'}/\partial u^\alpha$ $(A' = \alpha',\ A = \alpha)$, и записывает классический закон преобразования коэффициентов $\Gamma^A_{BC}$, придавая им специальные формы, определяемые заданными специальными значениями производных $\partial u^{A'}/\partial y^A$. Даются ковариантные производные различных возможных типов. Работа заканчивается изучением проблемы эквивалентности при этой группе преобразований.

*E. T. Daves*

Примечание переводчика. «Геометрия $K$-протяжений» — обобщение геометрии пространств аффинной связности, в которой К-мерные поверхности, называемые «К-протяжениями», играют ту роль, которую в пространствах аффинной связности играют геодезические линии. См. РЖМат., 1953, 437.

Перевод из Math. Revs., 1954, **15**, № 3, 254

**411. Об ареальных пространствах. VI. О характеристике метрических ареальных пространств. Тандаи** (On areal spaces. VI. On the characterization of metric areal spaces. Tandai Kwoichi), Tensor, 1953, **3**, 40—45 (англ.)

В этой статье автор доказывает теорему, которая уже рассматривалась в серии статей об ареальных пространствах, из которых данная статья является последней. Проблема касается вывода двухиндексного метрического тензора, если основным инвариантом геометрии является кратный интеграл $\int F(x, \partial x/\partial u)\, du^1 \ldots du^m$ в $n$-мерном пространстве. Если функция $F$ удовлетворяет условию, обеспечивающему независимость интеграла от параметрического представления, то она может быть фундаментальной функцией пространства Финслера при $m=1$ или пространства Картана, основанного на понятии площади, при $m=n-1$. В обоих случаях вывод двухиндексного тензора производится непосредственно. При $1<m<n-1$ проблема более трудна. Например, при $m=2$ функция $F$ может быть представлена как функция $L(xp^{ij})$ от $x$ и бивектора $p^{ij}$. Это легко приводит к 4-индексному метрическому тензору $g_{i_1i_2,j_1j_2}$, пригодному для измерения бивекторов. Если этот 4-индексный тензор можно расщепить на двухиндексные тензоры, причем удовлетворяется соотношение $g_{i_1i_2,j_1j_2}=2g_{[i_1[j_1}g_{i_2]j_2]}$, то говорят, что исходное пространство принадлежит к метрическому классу. Главный результат работы состоит в том, что пространства Римана, Финслера и Картана — единственные пространства метрического класса. *E. T. Davies*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 254

**412. О некоторых теоремах $G$-экстензорного анализа. Кавагути** (On some theorems in the $G$-extensor analysis. Kawaguchi Michiaki, Jr), Tensor, 1953, **3**, 46—52 (англ.)

Автор ввел $g$-экстензор или обобщенный экстензор в предыдущей работе (Tensor, 1952, **2**, 59—66). В настоящей работе, исходя из обычных экстензоров, с помощью дифференцирования, свертывания и применения новых рангов определяются различные $g$-тензоры. Например, строится много новых ковариантных и контравариантных $g$-тензоров с пониженным рангом. Некоторые из них получены из экс-точек и функций экс-точек. Наконец, путем повторного применения операций экстензорного анализа $\int$, $y$ и $z$ (Kawaguchi A., J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., 1940, сер. 1, **9**, 1—152) получаются обобщения $g$-экстензоров и связанных с ними инвариантов. *N. Coburn*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 255

**413. Тензорный анализ и мероопределение Ламэ. Румер Ю. Б.**, Ж. эксперим. и теор. физики, 1953, **25**, № 3, 271—281

Совокупность $n$ ковариантных векторов $\Omega_\sigma(\alpha)$ ($\alpha=1,\ldots,n$ — номер вектора), задаваемых в локальном касательном пространстве $E_n$, отнесенном каждой точке $X_n$, и рассматриваемых как ортонормированный неголономный репер, позволяет ввести, как известно, риманову метрику с помощью тензора

$$g_{\sigma\tau}=\sum_{(\alpha)}\Omega_\sigma(\alpha)\,\Omega_\tau(\alpha).$$

Автор называет величины $\Omega_\sigma(\alpha)$ составляющими метрического тензора Ламэ, рассматривая их как составляющие тензора, индекс $\sigma$ которого принадлежит $X_n$ с общей группой дифференцируемых преобразований координат (группа а), тогда как индекс $\alpha$ — пространству $E_n$ с группой ортогональных преобразований (группа б), матрица которых изменяется от точки к точке. Построено ковариантное дифференцирование тензоров, содержащих индексы и 1-го и 2-го рода, удовлетворяющее обобщенной лемме Риччи

$$\nabla_\sigma\Omega^\tau(\alpha)=0,\qquad \nabla_\sigma\Omega_\tau(\alpha)=0.$$

Если тензор не содержит индексов 2-го рода, то это дифференцирование совпадает с обычным ковариантным дифференцированием. Найдены известные выражения для коэффициентов вращения (коэффициентов Риччи), соответствующих переходу к бесконечно близкому неголономному реперу, и для коэффициентов связности через составляющие $\Omega_\sigma(\alpha)$ и их производные. Образованы в неголономных (инвариантных) составляющих выражения для дивергенции и ротора через производные по направлениям векторов репера. Получены путем параллельного переноса вектора по замкнутому контуру известные формулы для смешанных, а затем и неголономных составляющих тензора кривизны и его свертываний. Опираясь на разработанную схему тензорного анализа и следуя работе В. А. Фока (Ж. физ.-хим. об-ва, часть физич., 1930, **62**, 133), автор вводит в римановом пространстве спинорное поле и строит ковариантное дифференцирование спиноров. Вычислив вариацию инвариантного относительно групп (а) и (б) интеграла

$$I=\int\det|\,\Omega_\sigma(\alpha)\,|\,L\left(\Omega^\tau(\alpha),\ \frac{\partial\Omega^\tau(\alpha)}{\partial x^\rho}\right)dx'\ldots dx^n,$$

автор показывает, что если известна функция $L$, то можно для спинорных, как и для тензорных, полей получить уравнения поля и законы сохранения, следуя пути, указанному Гильбертом, положившим в основу теории тяготения интеграл более частного вида

$$I=\int\sqrt{\det|\,g_{\sigma\tau}\,|}\,L\left(g^{\lambda\mu},\ \frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}\right)dx'\ldots dx^n,$$

который достаточен лишь для тензорных полей. *Б. Л. Лаптев*

**414. О новой динамической релятивистской модели вселенной. Кастольди** (Di un nuovo Universo dinamico relativistico, Castoldi Luigi), Geofis. pura e appl., 1953, **20**, 1—9 (итал.; резюме англ.)

В модели закрытой изотропной вселенной, предложенной Фридманом (Friedmann A., Z. Physik, 1922, 10), линейный элемент в полярных координатах имеет вид:
$ds^2 = c^2\,dt^2 - d\rho^2/[1 - \rho^2/R^2(t)] - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$, где $R(t)$ — радиус кривизны трехмерного пространства, объем которого $V = 2\pi^2 R^3(t)$. Давление $p$ и масса вселенной $M$ выражаются формулами

$$p = c^2(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2)/8\pi\varkappa R^2,$$

$$M = 3\pi(\dot{R}^2 + c^2)R/4\varkappa,$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная.

Для определения временной зависимости $R(t)$, Фридман выставляет требования $p = 0$, что ведет, как отмечает автор, к изменяющейся со временем массе вселенной. Вместо требования $p = 0$ выставляется требование $M = \text{const}$, что приводит к дифференциальному уравнению для $R(t)$:

$$R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2(1 - R^*/R) = 0; \quad R^* = 2\varkappa M/3\pi c^2.$$

Это уравнение, кроме статического решения $R = R^*$, допускает семейство периодических решений;

$$t = \frac{1}{c}\int_{R^* - \sqrt{R^{*2}+h^2}}^{R} \frac{R\,dR}{\sqrt{(R^{*2}+h^2) - (R - R^*)^2}},$$

где $h^2 \geqslant -R^{*2}$ — постоянная интегрирования.

Приводимые автором сопоставления с опытными данными ввиду их ненадежности интереса не представляют. *Ю. Р.*

415 **РЕЦ.** **Тензорное исчисление. Спейн** (Tensor calculus, Spain Barri. VIII — 125 pp., Interscience Publishers, New York, Edinburgh and London, Oliver and Boyd, Ltd., 1953, 8s.6d.) [**Рецензия: Пьяджо** (Piaggio H. T. H.), Nature, 1954, 173, № 4407, 701—702 (англ.)]

416 **Д.** **Псевдоримановы пространства, содержащие поля постоянных и рекуррентных тензоров. Иванова М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

417 **Д.** **К геометрии поверхности унитарного пространства. Осипова М. З.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1954

## МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

418. **О некоторых множествах, получаемых из множеств дуг окружностей или сферических сегментов. Винченсини** (Sur certains ensembles déduits des ensembles d'arcs de cercle ou de calottes sphériques. Vincensini Paul), Bull. sci. math., 1953, 127, сер. 2, juillet-août, 120—128 (франц.)

Проектируя множество дуг окружности из точки окружности на прямую, лежащую в ее плоскости, получают множество сегментов прямой, замкнутых в проективном смысле (сегмент — любая из двух частей, на которые проективная прямая делится двумя ее точками), и обратно: множество сегментов можно рассматривать как проекцию множества дуг окружностей. Результаты, получаемые для множеств дуг окружностей, переносятся на множества сегментов и обратно. Например, если элементы множества дуг одной окружности имеют попарно общую точку, то на окружности имеются две диаметрально противоположные точки такие, что каждая дуга множества содержит по крайней мере одну из них. Если каждые три дуги множества дуг одной окружности имеют одну общую точку, то на окружности существует бесконечное множество пар точек $(p, q)$ таких, что каждая из дуг множества содержит хотя бы одну из точек каждой пары. Полученный для множеств дуг окружности результат переносится на множества дуг любой простой замкнутой кривой.

Аналогичное утверждение доказывается для множеств сферических сегментов, лежащих на одной и той же сфере, если любые четыре из них содержат общую точку. *Р. Ю. Мацкина*

419. **О спрямляемых кривых, аддитивных вектор-функциях и смешении отрезков. Залгаллер В. А., Решетняк Ю. Г.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 2, 45—67

Параллелоэдром авторы называют выпуклое тело $n$-мерного евклидова пространства, которое можно представить как результат смешения конечного числа отрезков (существует и другое понимание термина «параллелоэдр»), т. е. тело, зачерчиваемое концом вектора $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{r}_i$, когда $\mu_i$ независимо друг от друга пробегают значения $-1/2 \leqslant \mu_i \leqslant 1/2$, $\mathbf{r}_i$ фиксированы — другими словами, это есть выпуклый многогранник с центрально-симметричными двумерными гранями. По аналогии со смешением конечного числа отрезков определяется смешение линейных элементов кривой $K$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ — это есть тело $P$, зачерчиваемое концом вектора $\mathbf{r} = \int_0^l \mu\,\mathbf{x}'\,ds$, где $\mu(s)$ — произвольная измеримая функция $-1/2 \leqslant \mu(s) \leqslant 1/2$, $l$ — общая длина кривой; интеграл понимается в смысле Лебега. Тело $P$ естественно называть индикатрисой вариаций кривой $K$; если перенести его на половину вектора, соединяющего начало и конец $K$, то получим тело $Q$, называемое индикатрисой положительной части вариации кривой $K$ (Залгаллер В. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, № 5, 463—476). Ограниченное тело является смешением линейных элементов некоторой спрямляемой кривой тогда и только тогда, когда оно является пределом параллелоэдров; совокупность всех кривых, имеющих ту же индикатрису вариаций, что и данная спрямляемая кривая $K_0$, исчерпывается кривыми, получаемыми из $K_0$ перестановкой ее участков, и кривыми, получающимися из этих последних кривых предельным переходом со сходимостью по длине; в доказательстве существенно используется то, что перестановкой участков кривых всегда можно так преобразовать кривые произвольно заданной последовательности, что всякая сходящаяся подпоследовательность, выбранная из преобразованных кривых, будет сходиться по длине (здесь все кривые, разумеется, считаются спрямляемыми). Далее показывается, что индикатрисы положительной части вариации спрямляемых кривых можно характеризовать как область значений неатомической вполне аддитивной векторной функции $\varphi$ (т. е. такой, что для всякого множества

$E$ из области определения $\varphi$, для которого $\varphi(E) \neq 0$ найдется часть $E'$ множества $E$, такая, что $0 \neq \varphi(E') \neq \varphi(E)$. В работе описываются также опорные функции тел, которые можно рассматривать как индикатрисы вариаций спрямляемых кривых. В заключение в работе рассматривается вопрос о связи вариаций сходящихся и предельной кривых. *И. М. Яглом*

420. **Конкретные представления одной абстрактной схемы. Барбилян** (Reprezentări concrete ale unei scheme abstracte. Barbilian D.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 202—212 (рум.)

Рассматривается изотропная проекция многообразия мнимых окружностей евклидовой плоскости на трехмерное евклидово пространство, при которой всякой окружности соответствует вершина мнимого изотропного конуса, высекающего из плоскости эту окружность. Показывается, что при этой проекции совокупность окружностей, высекающих из фиксированной прямой $\omega$ отрезок длины $2l$, взаимно однозначно изображается мнимым цилиндром с осью $\omega$ и радиусом $il$ ($i = \sqrt{-1}$). Далее с помощью свойств цилиндра, рассматривавшихся автором раньше (Gaz. mat. şi fiz., 1952, **4**, **11**, 473—490), доказывается, что для четырех окружностей, вписанных в четыре треугольника четырехсторонника, существуют две и только две прямые, на которых эти четыре окружности высекают две четверки попарно равных отрезков.

Совокупность окружностей, высекающих из прямой отрезок постоянной длины, и мнимый цилиндр — это два конкретных представления одной абстрактной схемы. Для получения других представлений той же схемы замечается, что оба эти многообразия допускают просто транзитивную коммутативную группу, изоморфную прямому произведению группы сдвигов прямой и групп поворотов окружности (в случае совокупности окружностей эта группа состоит из сдвигов вдоль прямой и из переходов от одной окружности к другой окружности, имеющей те же точки пересечения с прямой, в случае цилиндра — из сдвигов вдоль его оси и поворотов вокруг этой оси). В качестве еще одного примера такого представления приводится совокупность окружностей, видимых из одной точки под одним и тем же углом (соответствующая группа состоит из поворотов вокруг этой точки и гомотетий с центром в этой точке). Для всех представлений этой схемы имеют место аналоги указанной выше теоремы. *Б. А. Розенфельд*

## ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

421. **Дифференциальная геометрия «в целом». Далла Вольта** (Geometria differenziale in grande. Dalla Volta Vittorio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 113—124 (итал.)

Обзор некоторых результатов дифференциальной геометрии «в целом». В частности, приводится теорема Либмана о том, что сфера является единственной поверхностью с постоянной положительной кривизной, а также теорема о том, что сфера является единственной поверхностью, у которой существует связь между главными кривизнами $k_1$ и $k_2$ вида $\varphi(k_1, k_2) = \text{const}$, где $\varphi$ — любая монотонная по обоим переменным функция.

Формулируется проблема Вейля о существовании замкнутой аналитической поверхности, реализующей заданную на сфере аналитическую метрику с положительной кривизной. Указывается на решение этой проблемы Вейлем, Н. Леви, Каччопполи.

Приводится ряд результатов, касающихся полных римановых многообразий и проблемы пространственных форм.

В работе совершенно не упоминаются результаты советских авторов, в частности А. Д. Александрова, которому в целом ряде вопросов, затронутых в обзоре, принадлежат наиболее общие теоремы. *А. В. Погорелов*

422. **О двух экстремальных свойствах дуги окружности и поверхности шара. Моор, Тёрёк** (Über zwei Extremaleigenschaften des Kreisbogens und der Kugelfläche. Moor A., Török A.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 157—163 (нем.)

Среди гладких выпуклых дуг, соединяющих концы основания равнобедренного треугольника и касающихся изнутри его сторон, наименьшее значение максимума кривизны и наибольшее значение ее минимума имеет дуга окружности и только она. При этом рассматриваются дуги, вдоль которых кривизна непрерывна или имеет изолированные разрывы первого рода. Для прямого кругового конуса и соответствующих поверхностей в нем аналогичным свойством по отношению к гауссовой и средней кривизне обладает сферический сегмент.

Предварительно уточняется лемма Брунна о том, что в лунке, образованной двумя выпуклыми дугами, внешняя из которых имеет полный поворот $\leqslant \pi$, максимум кривизны внешней дуги строго больше минимума внутренней. Пространственный аналог этой леммы для опирающихся на общий контур двух выпуклых поверхностей доказывается без получения строгого неравенства; поэтому в основном утверждении не устанавливается, что сферический сегмент является единственным решением экстремальной задачи. *В. А. Залгаллер*

423. **Об одном классе евклидовых многогранников. Венков Б. А.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 2, 11—31

Пусть $P$ — выпуклый $n$-мерный многогранник в эвклидовом пространстве $R^n$, причем: 1° $P$ имеет центр симметрии и 2° все его $(n-1)$-мерные грани также имеют центры симметрии. Автор рассматривает $n$-мерную «поверхность» $M$ как совокупность многогранников: зафиксировав один $P$, к нему пристраивают равные и параллельные ему $P'$, смежные с ним по всем его $(n-1)$-мерным граням. К каждому из этих пристроенных $P'$ снова пристраивают такие же равные и параллельные им $P''$, смежные по их свободным $(n-1)$-мерным граням и т. д. «Поверхность» $M$ может быть накрывающейся, т. е. в ней могут быть различные многогранники, которые имеют общие внутренние точки. Ряд многогранников $P$ поверхности $M$, в котором каждые два соседние члена смежны, называется цепью. Если $g_k$ есть $k$-мерная грань одного из многогранников $P$ поверхности $M$ и $P_1, P_2, \ldots, P_s$ такая цепь, что $g_k$ является $k$-мерною гранью всех ее многогранников, то эта цепь называется цепью типа $k$. Доказывается теорема: если $M$ — накрывающаяся, то в ней

существуют накрывающиеся цепи типа $n-2$. Доказательство ведется индукцией.

Выпуклый, конечный $n$-мерный многогранник $Q$ в $R^n$, как известно, называется параллелоэдром, если существует система $Q, Q', Q'', \ldots$ равных и параллельных $Q$ многогранников, заполняющих $R^n$ и не имеющих общих внутренних точек. Если они везде соприкасаются по целым $(n-1)$-мерным граням, $Q$ называется нормальным, в противном случае ненормальным параллелоэдром. Из теорем Минковского о выпуклых многогранниках следует, что для $Q$ выполняются условия 1° и 2°, кроме того, Б. Н. Делоне (Изв. АН СССР, 1929, № 1, 79—110; № 2, 147—164) для нормальных, а А. Д. Александров (Изв. АН СССР, 1934, № 6, 803—817) для ненормальных параллелоэдров показали, что: 3° если $g_{n-2}$ — некоторая $(n-2)$-мерная грань параллелоэдра $Q$, то число всех $(n-1)$-мерных граней $Q$, параллельных $g_{n-2}$, равно четырем или шести. Наоборот, если выпуклый, конечный $n$-мерный многогранник $Q$ обладает свойствами 1°, 2° и 3°, то он есть нормальный параллелоэдр. Всякий ненормальный параллелоэдр является вместе с тем и нормальным (пример: параллелепипедами можно заполнить пространство ненормально (кирпичная кладка), а можно заполнить и нормально). *Б. Н. Делоне*

**424. О заполнении пространства многогранниками. Александров А. Д.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 2, 33—43

Автор обобщает рассмотренную в предыдущем реферате теорему Б. А. Венкова (см. реф. 423). Рассматривается заполнение многогранниками $n$-мерного односвязного, полного пространства $R^n$ постоянной кривизны (евклидова, сферического или пространства Лобачевского).

Пусть в $R^n$ имеется конечное число различных $n$-мерных многогранников $P_i$. Взяв в $R^n$ многогранник, равный одному из $P_i$, к нему по всем его целым $(n-1)$-мерным граням прикладываются многогранники, равные каким-либо $P_i$, к ним опять по всем свободным граням прикладываются многогранники, равные каким-либо из $P_i$ и т. д. так, чтобы локально около каждой грани, по которой к предыдущему многограннику приложен последующий, эти два $P_i$ лежали по разные ее стороны ($P_i$ могут быть не выпуклы). Многогранники при таком построении могут накрываться. Доказывается, что 1) построенная система многогранников заполняет все $R^n$ и 2) для того, чтобы в ней не было накрывающихся многогранников, достаточно, чтобы любые ее многогранники, сложенные по $(n-2)$-мерной грани, не накрывали друг друга в сколь угодно малой окрестности внутренней точки этой грани. Условия, чтобы $P_i$ были смежны по целым $(n-1)$-мерным граням и чтобы различных $P_i$ было только конечное число, могут быть ослаблены. *Б. Н. Делоне*

**425. О решетках и многогранниках. Хадвигер** (Über Gitter und Polyeder. Hadwiger H.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 3, 246—254 (нем.)

В работе исследуются некоторые специальные случаи равносоставленности. Пусть $\Gamma$ — кристаллографическая группа движений $k$-мерного евклидова пространства $R$ (т. е. дискретная группа движений с ограниченной фундаментальной областью). Два $k$-мерных многогранника называются $\Gamma$-равными, если один из них совмещается со вторым в результате применения некоторого движения из группы $\Gamma$. Многогранники называются $\Gamma$-равносоставленными, если их можно разбить на одинаковое (конечное) число соответственно $\Gamma$-равных многогранников. Пусть $p$ — точка пространства $R$, $K_\rho(p)$ — шар радиуса $\rho$ с центром $p$ и пусть $V(M)$ обозначает $k$-мерный объем тела $M \subset R$. Для произвольного $k$-мерного многогранника $A \subset R$ положим:

$$\omega(p; A) = \lim_{\rho \to 0} \left[ \frac{V(K_\rho(p) \cap A)}{V(K_\rho(p))} \right].$$

Пусть далее $G$ — некоторая решетка, т. е. множество тех точек пространства $R$, которые могут быть получены из одной точки $p_0$ в результате движений из группы $\Gamma$. Положим $\varphi(A) = \sum_p \omega(p; A)$, где суммирование распространено на все точки $p$, принадлежащие решетке $G$. Тогда $\varphi$ есть аддитивный функционал, заданный на множестве всех $k$-мерных многогранников, причем для $\Gamma$-равных (а следовательно, и для $\Gamma$-равносоставленных) многогранников $A$ и $B$ имеем $\varphi(A) = \varphi(B)$. Функционал $\varphi$ зависит от выбора решетки $G$. Автор доказывает, что необходимым и достаточным условием $\Gamma$-равносоставленности многогранников $A$ и $B$ является выполнение равенств $\varphi(A) = \varphi(B)$ для всех функционалов указанного вида. Приведены некоторые следствия этой теоремы. *В. Г. Болтянский*

---

См. также: 3, 12 К, 152, 187, 243, 297

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**426. Применение кубатурных формул к численному решению задачи Коши для некоторых уравнений математической физики. Люстерник Л. А.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 14—26

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$A_n(d)\, u(x, y, t) = B(d_1, d_2)\, u(x, y, t), \qquad (1)$$

где $d = \frac{\partial}{\partial t}$, $d_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $d_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $A_n(d)$ — многочлен $n$-й степени от $d$, а $B$ — многочлен от $d_1$ и $d_2$, при начальных условиях

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x, y), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

Задача разыскания точного решения заменяется

следующей: построить конечную систему коэффициентов $C_{ik}^{(m)}$ и векторов $(x_{ik}^{(m)}, y_{ik}^{(m)})$ так, чтобы выражение

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i} c_{ik}^{(m)}\varphi_k(x+x_{ik}^{(m)},\ y+y_{ik}^{(m)}) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} U_k(m,\ t)\varphi_k \tag{3}$$

было точным решением задачи (1), (2) в тех случаях, когда $\varphi_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$, суть произвольные полиномы степени не выше $m$ ($m$ — произвольно фиксированное число). Эта задача разыскания кубатурных формул (3) решается для двух уравнений (1): 1) когда (1) есть уравнение теплопроводности и 2) когда (1) есть волновое уравнение.

Приведены результаты вычислений при $m=6$, 10, 14.

Для уравнения теплопроводности доказывается сходимость приближенных решений к точным для широкого класса начальных функций $\varphi_0(x, y)$. Именно, доказано, что приближенное решение (3) $U_0(m, t)\varphi_0(x, y)$ при $m\to\infty$ стремится к точному, если только $\varphi_0$ непрерывна на всей плоскости $(x, y)$ и $\max_{\sqrt{x^2+y^2}=A} |\varphi_0(x, y)|\, e^{-cA} \to 0$ при $A\to\infty$ для какого-нибудь $c>0$. Стремление будет при всех $t\geqslant 0$ равномерным по $(x, y)$ в любой конечной части плоскости $(x, y)$. *О. А. Ладыженская*

**427. Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа. Карманов В. Г.,** Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 3, 439—442

Доказывается существование решения и обосновывается применение конечноразностного метода для следующей задачи:

Пусть $G$ — $m$-связная область плоскости $xy$, ограниченная в верхней полуплоскости непрерывными линиями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ с концами в соответствующих точках оси $Ox$: $A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots; A_m, B_m$; открытые отрезки $(A_i, B_i)$ $(i=2,3, \ldots, m)$ не перекрываются и принадлежат отрезку $[A_1, B_1]$. В нижней полуплоскости область $G$ ограничена отрезками $[A_i, C_i]$ и $[B_i, C_i]$ $(i=1,2, \ldots, m)$ характеристик $y=A_i-x$ и $y=x-B_i$; $C_i$ — точка пересечения этих характеристик.

Рассматривается задача $T^*$: найти такую функцию $u(x, y)$, что: 1) $u$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области $G$ при $y\neq 0$; 2) $u$ непрерывна в области $\overline{G}$; 3) $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ непрерывны в $G$; если они обращаются в бесконечность в точках $A_i$ и $B_i$ $(i=1,2, \ldots, m)$, то порядка ниже единицы; 4) на линиях $\gamma_l$ и на характеристиках $[A_i, C_i]$ и $[B_i, C_i]$ $(i=2,3, \ldots, m)$ $u$ принимает заданные значения

$$u|_{\gamma_l} = f_l,\ u|_{[A_1, C_1]} = \psi_1,\ u|_{[B_i, C_i]} = \psi_i,$$

причем $f_i$ непрерывны, а $\psi_i$ дважды дифференцируемы.

Пусть $\gamma$ — гладкая линия Жордана в верхней полуплоскости, которая соединяет точки $A_1$ и $B_1$ и такая, что односвязная область $\overline{G}'$, ограниченная контуром $\gamma+[A_1, C_1]+[B_1, C_1]$, содержит $\overline{G}$. Пусть $f$ — произвольная непрерывная на $\gamma$ функция.

Пусть $v$ — решение задачи $T$ А. В. Бицадзе (РЖМат, 1954, 2965) для области $G'$ при граничных условиях

$$v|_{\gamma} = f,\ v|_{[A_1 C_1]} = \psi_1.$$

Задача $T^*$ сводится к задаче $T^{**}$: пусть $G^0$ — односвязная область с той же границей $\Gamma=\Sigma_{i=1}^{m}\gamma_i$ в верхней полуплоскости, в нижней полуплоскости $G^0$ ограничена отрезками характеристик $[A_1, E_1]$, $[A_2, E_1]$; $[B_i, E_i]$, $[A_{i+1}, E_i]$ $(i=2,3, \ldots, m-1)$; $[B_m, E_m]$, $[B_1, E_m]$; при этом $[A_1, E_1]$ и $[B_i, E_i]$ $(i=2,3, \ldots, m)$ параллельны характеристике $y=-x$, а остальные — характеристике $y=x$. Требуется найти функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области $G^0$ условиям 1), 2), 3) задачи $T^*$ и условию 4):

$$w|_{\gamma_i} = F_i\ (i=1,2, \ldots, m),\ w|_{[A_1, E_1]} = 0,$$

$$w|_{[B_i, E_i]} = F_i(B_i)\ (i=2,3, \ldots, m),\ F_1(A_1) = 0,$$

где $F_i = v|_{\gamma_i} - f_i$.

Последняя решается методом конечных разностей, примененным ранее референтом для решения задачи $T$ (РЖМат, 1953, 1401). *З. И. Халилов*

**428. О точности некоторых формул численного интегрирования уравнения теплопроводности. Юшков П. П.,** Тр. Ленингр. ин-та холодильной и молоч. пром-сти, 1953, **4**, 117—121

Решение задачи численного интегрирования уравнения теплопроводности по методу сеток может быть приведено к следующему разностному уравнению:

$$\theta_{i,\,k+1} = \left(1-\frac{2la^2}{h^2}\right)\theta_{i,\,k} + \frac{la^2}{h^2}(\theta_{i-1,\,k}+\theta_{i+1,\,k}), \tag{1}$$

где $\theta_{i,\,k}$ — приближенное значение температуры в точке $x=ih$ в момент времени $t=kl$. Точность формулы зависит от выбранного соотношения между $l$ и $h$. При выборе $l=h^2/6a^2$ из (1) может быть получена формула (формула Д. Ю. Панова), дающая погрешность четвертого порядка малости относительно $h$. В статье приводится одно из возможных доказательств этого факта.

Наряду с (1) для численного решения уравнения теплопроводности может быть применена формула Ш. Е. Микеладзе:

$$\alpha\theta_{i,\,k+1} + \beta\theta_{i,\,k+2} - (\alpha+\beta)\,\theta_{i,\,k} = \theta_{i-1,\,k} - 2\theta_{i,\,k} + \theta_{i+1,\,k}, \tag{2}$$

с помощью которой может быть определена температура в узлах $(k+2)$-го горизонтального ряда по значениям температуры в узлах двух предшествующих рядов.

Эта формула дает погрешность четвертого порядка малости относительно $h_2$, если $h$ и $l$ удовлетворяют соотношению

$$12 \leqslant \frac{h^2}{la^2} \leqslant 9+\sqrt{57} \approx 16{,}5.$$

Если это соотношение не удовлетворяется, пользование формулой (2) может привести к расходящемуся процессу. *В. Т.*

**429. О нахождении собственных значений методом сеток. Саульев В. К.**, Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 1003—1006

Дается оценка точности аппроксимации собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов эллиптического типа собственными значениями их разностных аналогов. Рассматривается такой оператор вида

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - au,$$

действующий на функции, заданные в $\overline{Q} = Q + \Gamma$; $Q$ — $m$-мерная область, $\Gamma$ — ее граница с порядком гладкости $[m/2]+6$, $u = 0$ на $\Gamma$. Положительные функции $a_i$ и $a$ имеют порядок гладкости $[m/2]+5$ и $[m/2]+4$ соответственно. Рассматривается сеть с шагом $h_i$ по оси $x_i$ и оператор $L^{(h)}$, действующий на функции, заданные в ее узлах,

$$L^{(h)}u^{(h)} = \sum_{i=1}^{m} \left[a_i\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right) u^{(h)}_{\overline{x}_i}\right]_{x_i} - a(x_i)\,u^{(h)}.$$

Значение $u^{(h)}$ в «приграничном» узле $B \subset Q$ определяется путем линейной интерполяции между значениями $u^{(h)}$ в ближайшем «строго внутреннем» узле $C$ и точкой границы $D$, в которой $u^{(h)} = 0$.

Рассматриваются при заданных граничных условиях системы собственных значений $(\lambda_p)$ и $(\lambda_p^{(h)})$ (упорядоченных в порядке возрастания) операторов $L$ и $L^{(h)}$ и соответственных собственных функций $(u_p)$ и $(u_p^{(h)})$. Основной результат работы заключен в неравенстве (5): с точностью до малых более высокого порядка

$$|\lambda_p - \lambda_p^{(h)}| \leqslant \frac{h^2}{24} A + BH^{2-\varepsilon},$$

$$\left(h = \sqrt{\sum_i h_i^2},\ H = \max_i h_i\right);$$

$\varepsilon$ — произвольное положительное число; $A$ и $B$ алгебраически выражены через максимумы модулей $a_i$ и их третьих производных и третьих производных от $u_q$, через геометрические параметры области $Q$ и значение $\lambda_p^{(h)}$. Дается краткая схема доказательства, опирающегося на вариационные свойства собственных значений и некоторые результаты цитированных работ С. Л. Соболева, О. А. Ладыженской и Л. А. Люстерника. Его основным этапом является неравенство (4): с точностью до малых более высокого порядка

$$|\lambda_q - \lambda_p^{(h)}| \prod_i h_i \sum u_q u_p^{(h)} \leqslant \frac{h^2}{24} A + BH^{2-\varepsilon}$$

(сумма берется по всем внутренним узлам). Неравенство (4) показывает, что или $|\lambda_q - \lambda_p^{(h)}|$ имеет малость требуемого порядка или соответственные собственные функции почти ортогональны. Первый случай имеет место при $p = q$.

Указывается, что в некоторых случаях интерполяция в приграничных узлах может быть заменена модификацией в них оператора $L^{(h)}$; что если «сносить» нулевые граничные значения для $u^{(h)}$ на ближайшие к границе узлы, $|\lambda_p - \lambda_p^{(h)}|$ становится величиной порядка $h$; то же будет, если допускать неравномерность шагов $h_i$ хотя бы по одному переменному; для более общих эллиптических операторов

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u\right) - au$$

дается оценка для приближения $|\lambda_p - \lambda_p^{(h)}|$ порядка $h$. *Л. А. Люстерник*

**430. О влиянии ошибок округления при решении уравнения Лапласа. Абрамов А. А.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 37—40

Дается вероятностная оценка накопления ошибок округления при решении конечно-разностного аналога уравнения Лапласа методом итераций (или, что то же самое, при решении уравнения теплопроводности методом сеток). В частности, для плоского случая, предполагая шаг $h$ фиксированным, автор доказывает, что если число итерации $k \to \infty$, то математическое ожидание квадрата результирующей ошибки имеет порядок $\ln h$. *М. Б. Гагуа*

**431. Релаксационный метод решения задач обтекания с ударными волнами. Вудс** (A relaxation treatment of shock waves. Woods L. C.), Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1953, № 134, 1—7 (англ.)

Обсуждается возможность применения метода сеток к решению задачи обтекания профиля при образовании в потоке ударной волны. Разностные уравнения решаются релаксационным методом. От физической плоскости $x$, $y$ автор переходит к преобразованной плоскости несжимаемого потока $\varphi$, $\psi$ с уравнением профиля $\psi = 0$. Выписывается приближенное уравнение

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial \psi^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(M^2 \frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) \qquad (L = \log 1/q),$$

где $q$ — модуль скорости.

Соответствующее разностное уравнение записывается в виде

$$X_5 = \left(1 - M_5^2\right) L_1 + L_2 + \left(1 - M_5^2\right) L_3 + L_4 - 2\left(2 - M_5^2\right) L_5 + \frac{1}{2} M_5^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 (L_1 - L_3)^2,$$

причем последним членом в расчетах автор пренебрегает.

В результате проведенной счетно-экспериментальной работы утверждается, что применение релаксационного метода в сверхзвуковых областях всегда возможно, хотя сходимость и ухудшается.

При достижении некоторого числа $M$ становится невозможным исключить все остатки — найти непрерывное решение. Однако, как утверждает автор, при этом можно расположить неисчезающие остатки парами с противоположными знаками, выявив, таким образом, интенсивность и положение ударной волны. Существенным при этом является определение основания ударной волны, которое, по предположению автора, следует считать совпадающим

с тем местом на профиле, где начинает отказывать релаксационный метод. Дальнейший способ построения, рекомендуемый автором, применим только для достаточно наклонных ударных волн. Этот способ использует основное разностное уравнение в сочетании с условиями на ударной волне.

Вычисления по полученным автором соотношениям могут привести к противоречивым результатам. Однако автор утверждает, что соответствующие трудности в ходе счета могут быть преодолены. В конце работы указывается, как следует распространить предлагаемый прием, если учитывать завихренность потока за ударной волной.

Имеются многочисленные ссылки на результаты и соображения предшествующих работ автора, указанных в библиографии.

Примечание референта. Чтение работы затрудняют опечатки: на стр. 3 вместо $a_* = q_*$ должно быть $a_* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\, q_*$ ($\gamma$ — показатель адиабаты, $q_*$ — предельная скорость); на стр. 4 в формуле (11) вместо $(M-1)^3$ должно быть $(M^2-1)^3$; на стр. 5 вместо $L_{0a} = L_0 = X_1'$ должно быть $L_{0a} = L_0 - X_1'$; в формуле (14) у некоторых величин пропущены штрихи, в формуле (16) в числителе $Y_1'$ следует заменить на $X_1'$; на стр. 6, строка 1, вместо $a_1$ должно быть $\alpha_1$, в формуле (18) пропущена скобка. *Д. Б. Кикин*

**432. Расчеты одноразмерного неустановившегося движения грунтовых вод методом конечных разностей. Архангельский В. А.,** Инженерный сб., 1953, **16**, 203—210

См. РЖМех, 1954, 3051.

**433. О сходимости процесса численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений разностным методом. Абдуллаев Т. Г.,** Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 139—144

Доказывается сходимость метода решения обыкновенного дифференциального уравнения, изложенного в работе Ш. Е. Микеладзе (Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 5—6, 627—642).

Основными результатами являются следующие:

1. Дается оценка погрешности функции и ее производной в $k+1$ точке разбиения в зависимости от коэффициентов уравнения и максимума абсолютных величин остаточных членов в формулах Микеладзе для точек деления 0, 1, 2, . . ., $k$.

2. Устанавливается связь между порядком погрешности таблицы начальных условий и погрешностью функции и ее производной; показывается, что если шаг разбиения стремится к 0, то и абсолютные величины погрешностей функции и ее производной стремятся к 0.

В работе рассматривается уравнение 2-го порядка, но, как указывает автор, результаты легко получить для общего случая. Имеются опечатки.

*Н. Н. Моисеев*

**434. Некоторые приложения функционально-аналитических методов в прикладном анализе. Коллац** (Einige Anwendungen funktionalanalytischen Methoden in der praktischen Analysis (Zusammenfassender Bericht). Collatz Lothar), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 5, 327—357 (нем.)

Обзор некоторых работ по вопросу, указанному в заглавии.

1. Некоторые основные понятия функционального анализа.

2. Общая теорема об итерационном процессе (принцип сжатых отображений и соответствующие оценки).

3. Нелинейные и линейные системы уравнений (применение общих теорем к исследованию процесса итераций — обычного и процесса Зейделя).

4. Обычный и упрощенный итерационные процессы Ньютона для системы нелинейных уравнений (даются условия сходимости, основанные на п. 2; полученное условие (36) сомнительно, так как вывод его опирается на теорему о среднем для вектор-функций, которая неверна).

5. Задачи с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений (в условиях теоремы Пикара указывается возможность эффективной оценки близости приближенного решения к истинному).

6. Задачи с граничными условиями (в случае граничных задач для уравнений вида $L(u) = \varphi(x_1, \ldots, x_m, u)$, где $L$ — линейный оператор, для которого функция Грина известна, даются основанные на п. 2 известные достаточные условия существования решения).

7. Обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения более общего вида (тот же вопрос для уравнений вида $y^n = \varphi(x, y, \ldots, y^{n-1})$).

8. Операторы монотонного типа (операторы в полуупорядоченных пространствах такие, что $Tv \leqslant Tw$ влечет $v \leqslant w$, т. е. те, для которых верна теорема Чаплыгина).

9. Системы уравнений монотонного типа. Оценка решений при применении метода релаксации (применение очевидных оценок решения для задач монотонного типа в случае вещественных систем).

10. Краевые задачи монотонного типа (указывается ряд краевых задач (см. п. 6.), в которых линейный оператор эллиптический, принадлежащий к монотонному типу).

11. Метод границ и метод областей (получение границ для решения на основе свойств операторов монотонного типа и принципа максимума; примеры).

12. Метод Ньютона для нелинейных граничных задач (задачи типа п. 6).

13. Задачи с начальными условиями для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа (простейшая система указанного вида).

14. Интегральные уравнения.

Обзор чрезвычайно неполный. По существу описаны ряд работ автора (Z. angew. Math. und Mech., 1952, **32**, 76; 1953, **33**, 116; Arch. Math., 1952, **3**, 366 и др.), а также нескольких других немецких авторов: H. Bückner, D. Morgenstern, H. Sasenfeld, W. Schmeidler, J. Weissinger; работы авторов других стран лишь упомянуты, а работы советских авторов вовсе не отражены, за исключением одной давней работы референта (Acta Math., 1939, **71**, 63—97). *Л. В. Канторович*

**435. О сходимости при случайных начальных данных и накоплении ошибок итерационного процесса решения системы алгебраических урав-**

ний. **Люстерник Л. А.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 41—45

Система $y = Ay + b$ решается методом итераций $y_k = Ay_{k-1} + b$; предполагается, что компоненты $\varepsilon_0^{(j)}$ начального вектора ошибки $\varepsilon_0 = y_0 - y$ являются независимыми случайными величинами с математическим ожиданием 0 и дисперсиями $D_j$.

Устанавливается, что

$$\text{м. о.}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\varepsilon_k^{(j)}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2k}\sum_{j=1}^{n}D_j\left(u_i^{(j)}\right)^2$$

(следующее равенство для того же м. о. неверно).

Здесь $u_i^{(j)}$ — компоненты ортонормальных собственных векторов $u_i$ матрицы $A$, $\lambda_i$ — соответствующие собственные числа.

Если все $D_j$ равны $D$, то

$$\text{м. о.}\left(\frac{1}{n}\sum\left(\varepsilon_k^{(j)}\right)^2\right) = \frac{D}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2k}.$$

В качестве примеров приводится система $y^{(i)} = {}^1/_2\left(y^{(i+1)} - y^{(i-1)}\right)$, $y^{(0)} = a$, $y^{(n)} = b$ и система, аппроксимирующая решение задачи Дирихле в единичном квадрате. Для первой системы приводится численный пример (при $n = 115$) со случайными начальными данными, показывающий, что результаты вычисления хорошо согласуются с вероятностными оценками. *Д. К. Фаддеев*

436. **О сходимости простых итераций и критериях знакоопределенности квадратичных форм. Гаврилов** (Про збіжність простих ітерацій та критерії знаковизначеності квадратичних форм. Гаврилов Ю. М.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 6, 389—393 (укр.; резюме русс.)

Доказана теорема: Пусть $A_0$ — действительная симметричная матрица с положительными диагональными элементами, $A_1$ — матрица, составленная из диагональных элементов $A_0$, $A_2 = A_0 - A_1$. Для того чтобы итерационный процесс $X_{m+1} = -A_1^{-1}A_2X_m + A_1^{-1}P$ сходился к решению системы $A_0X = P$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_0$ и $A_0 = A_1 - A_2$ были бы положительно определенными.

Из теоремы следует, что для системы с симметрическими матрицами, диагональные элементы которых положительны, для сходимости метода простой итерации требуется дополнительное условие, по сравнению с условием, обеспечивающим сходимость метода Зейделя.

Доказательство теоремы легко упрощается на основании известных свойств собственных значений и собственных векторов матрицы $A_1^{-1}A_2$. Следует отметить, что использование этих свойств позволяет доказать более общую теорему о сходимости процесса итераций

$$X_m = R^{-1}SX_{m-1} + R^{-1}P,$$

где $A_0 = R + S$, $R$ и $S$ симметричны, $R$ положительно определенная. Именно, необходимыми и достаточными условиями сходимости процесса является положительная определенность матриц $A = R + S$ и $R - S$.

Достаточность этих условий приведена, например, в работе Вегнера (РЖМат, 1954, 5781). В работе даются некоторые критерии знакоопределенности квадратичных форм. *В. Н. Фаддеева*

437. **О сходимости итерационных процессов и критериях знакоопределенности квадратичных форм. Гаврилов Ю. М.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, 87—94

Первый и третий параграфы работы повторяют работу автора (см. реф. 436). Теорема II из § 2, дающая критерий того, что собственные числа матрицы $E - A_{01}$ $\left(A_{01} = \frac{A_0}{\max a_{ii}}, A_0\right.$ — симметричная матрица с положительными диагональными элементами) меньше единицы, содержит лишнее условие о предварительном нормировании матрицы системы $A_0X = P$ посредством деления элементов матрицы на наибольший по модулю диагональный элемент и о положительности диагональных элементов $A_0$. Действительно, для сходимости итерационного процесса

$$X_m = (E - A_0)X_{m-1} + P$$

к решению системы $A_0X = P$ с симметричной матрицей $A_0$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_0$ и $2E - A_0$ были положительно определенными.

Теорема легко доказывается на основании элементарных свойств собственных значений вещественной симметричной матрицы.

В теореме III, касающейся вопроса подготовки системы с симметричной матрицей $A_0$ для получения решения процессом Зейделя, условие «нормированности к единице» матрицы системы также является чрезмерным. Теорема остается верной, если предположить, что все диагональные элементы матрицы $A_0$ меньше двух. *В. Н. Фаддеева*

438. **Решение системы линейных уравнений прямыми методами. Мейзлик** (Rie enie systémov lineárnych rovníc priamymi metódami. Mejzlík Ladislav), Inžen. stavby, 1954, 2, № 3, 110—116 (словац.)

Дается детальное описание вычислительной схемы метода исключения Гаусса для решения линейной алгебраической системы, с симметричной и несимметричной матрицей, который автор считает наиболее приспособленным для практических целей. Предлагаемые схемы являются более громоздкими, чем обычные вычислительные схемы метода. *В. Н. Фаддеева*

439. **Об оценке ошибок при решении линейных систем уравнений. Коллац** (Zur Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen. Collatz L.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 1—2, 71—72 (нем.)

Если приближение $y$ к решению линейной системы уравнений $Ax = r$ находится в результате вычисления с округленными величинами (матрицей $A + F$ и вектором $r + s$), то легко устанавливается оценка этого приближения

$$|y - x| \leqslant \frac{|s| + |f| + |\overline{F}||y|}{|\underline{A + F}| - |\overline{F}|}.$$

Здесь $f$ — вектор ошибки для приближения $y$, символы $|\underline{G}|$ и $|\overline{G}|$ обозначают нижнюю и верхнюю грани матрицы $G$, т. е. корень квадратный из наименьше-

го и наибольшего собственного значения матрицы $\overline{G'G}$. Автор указывает на необходимость получения хорошей оценки для нижней грани матрицы.

Для случая положительно определенной эрмитовой матрицы автор рекомендует для оценки нижней грани матрицы, совпадающей в этом случае с наименьшим собственным числом, воспользоваться оценками, приведенными в работе Барча (Bartsch H., Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1—2, 72—74).

*В. Н. Фаддеева*

**440. Применение теоремы компенсации к варьированию статически-неопределимых систем. Мак-Нил** (Application of the compensation theorem to the modification of redundant structures. MacNeal R. H.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 10, 726—727 (англ.)

Определяется изменение решения системы $n$ линейных неоднородных уравнений с $n$ неизвестными при конечном (необязательно малом) изменении части коэффициентов. Исходная система и «измененная» записываются соответственно в матричном виде

$$[A^0]\,[F^0] = [U] \text{ и } [A]\,[F] = [U];$$

здесь $[A^0]$ и $[A]$ — квадратные $n \times n$-матрицы, а $[F^0]$, $[F]$, $[U]$ — столбцы из $n$ элементов, причем $[A] = [A^0] + [\delta A_{mm}]$, $[F] = [F^0] + [\delta F]$, и в матрице $[\delta A_{mm}]$ отличны от нуля лишь элементы, стоящие на пересечении первых $m$ строк и первых $m$ столбцов.

Полагая

$$[\delta U_m] = -[\delta A_{mm}]\,[F],$$

автор сводит определение искомого столбца $[\delta F]$ к решению двух систем уравнений

$$[A^0]\,[\delta F] = [\delta U_m]$$

и

$$\{[I_m] + [\delta A_{mm}]\,[B_{mm}]\}\,[\delta U_m] = -[\delta A_{mm}]\,[F^0],$$

где $[I_m]$ — единичная матрица $m$-го порядка, а $B_{mm}$ — матрица, стоящая на пересечении первых $m$ строк и первых $m$ столбцов в матрице $[A^0]^{-1}$. Поскольку в $[\delta U_m]$ отличны от нуля лишь первые $m$ элементов, то для решения первой системы надо знать только элементы первых $m$ столбцов матрицы $[A^0]^{-1}$. Вторая система имеет порядок $m$.

Указывается, что существенные упрощения достигаются этим методом, когда $n$ велико, а $m$ значительно меньше $n$.

При изменении лишь одного коэффициента ($m=1$) получаются простые формулы:

$$\delta U_1 = -\delta A_{11} F_1^0 / (1 + B_{11}\delta A_{11}),$$

$$\delta F_k = -B_{k1}\delta A_{11} F_1^0 / (1 + B_{11}\delta A_{11}),$$

где $B_{k1}$ — $k$-й элемент первого столбца в матрице $[A^0]^{-1}$.

Автор указывает, что элементарные применения идеи метода давно известны инженерам-электрикам под названием «теоремы компенсации». Автор использует свой метод для исследования статически-неопределимых систем.

*Ф. Р. Гантмахер*

**441. Обобщение формулы Симпсона для случая неравноотстоящих ординат. Брун** (A generalization of the formula of Simpson for nonequidistant ordinates. Brun Viggo), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 1, 1—15 (англ.)

Геометрическим путем выводится формула механических квадратур, обобщающая формулу Симпсона для трех неравноотстоящих ординат $y_0$, $y_1$, $y_2$:

$$\int_0^{a+b} f(x)\,dx \approx \frac{a+b}{6}(y_0+4y_1+y_2) + \frac{a-b}{3}(y_0-y_2). \quad (1)$$

Здесь $a$ — расстояние между $y_0$ и $y_1$, а $b$ — расстояние между $y_1$ и $y_2$. Указывается, что формула (1) имеет более простые коэффициенты, чем аналогичная формула, получающаяся методом парабол, которую автор приводит без указаний на ее точность. Используя формулу Тейлора, автор выводит формулу остаточного члена для (1) в виде

$$R_c = -\frac{a+b}{6}\left\{(4\cdot 3a^2 - 4\cdot 3ac + 3c^2)\frac{f''(0)}{3!} + \right.$$
$$\left. + (4\cdot 4a^3 - 4\cdot 4ac^2 + 6c^3)\frac{f'''(0)}{4!} + \ldots\right\},$$

где $c = a + b$.

На примерах показывается, что погрешность формулы (1) иногда может быть меньше погрешности обычной формулы Симпсона. Рекомендуется применять формулу (1) в случае ординат, близких к равноотстоящим.

Примечание референта. Выведенная автором формула совпадает с формулой Д. Ю. Панова (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 317—320), полученной им ранее другим путем для случая ординат, близких к равноотстоящим. В той же работе Д. Ю. Панова выведена упоминаемая автором вторая, более сложная, обобщенная формула Симпсона и исследована ее точность. Точность эта оказывается выше точности формулы (1).

*М. К. Керимов*

**442. Новая формула о среднем и ее применение в механической квадратуре. Чорэнеску** (O nouă formulă de medie şi aplicaţiile ei la cuadraturile mecanice. Ciorănescu Nicolae), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 9, 410—414 (рум.)

Автор получает квадратурную формулу

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^{k-1}\frac{(b-a)^k}{k!} \times$$
$$\times \frac{F^{(k-1)}(b) + (-1)^{(k-1)}F^{(k-1)}(a)}{2} + R_p, \quad (1)$$

где

$$R_p = \frac{(b-a)^{2p+3}}{24\,(2p)!}[\theta^{2p} + (1-\theta)^{2p}]\,F^{(2p+2)}(\xi).$$

Отметим, что формула (1) известна и может быть получена как частный случай более общей формулы, выведенной референтом (Микеладзе Ш. Е., Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 4, 613—615), где надо положить

$$P_m(x) = \frac{1}{2}[(x-a)^m - (b-x)^m].$$

Новым является другое выражение остаточного члена, полученное путем применения новой формулы о среднем (приведенной без доказательства).

*Ш. Е. Микеладзе*

**443. Графический способ. Рассел** (A graphical procedure. Russell J. P.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 710—711 (англ.)

Описывается графический способ построения поля направлений уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y) + x}{\psi(x) + y},$$

состоящий в том, что строятся две кривые $\Gamma_1 (x = -\varphi(y))$ и $\Gamma_2 (y = -\psi(x))$ и направление в точке $(x_0, y_0)$ определяется как перпендикулярное к прямой, проходящей через точку кривой $\Gamma_1$ с ординатой $y_0$ и точку кривой $\Gamma_2$ с абсциссой $x_0$.

*М. В. Пентковский*

**444. О движущихся полюсах в нелинейной колебательной системе. Ригли** (A note on moving poles in nonlinear oscillating systems. Wrigley William B.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 6, 774—777 (англ.)

Указывается способ графического построения изоклин на фазовой плоскости $x\dot{x}$ для нелинейного уравнения вида $\ddot{x} - N(\dot{x}, x) = 0$.

*Н. В. Бутенин*

**445 К. Применение метода конечных разностей для решения плоских и имеющих одну ось симметрии пространственных задач теории потенциала. Вейганд** (Die angenäherte Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Weigand A., 60 S., Veb Verlag Technik Berlin, 1953, 9.60 DM) (нем.)

В популярной форме излагаются элементарные сведения относительно применения разностного метода к решению некоторых краевых задач теории потенциала. Помимо обычной аппроксимации уравнения Лапласа $\varphi_{0,0} = 0{,}25\,[\varphi_{1,0} + \varphi_{-1,0} + \varphi_{0,1} + \varphi_{0,-1}]$, в работе рассматривается более точная (вывод см. также Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа): $\varphi_{0,0} = 0{,}2\,[\varphi_{1,0} + \varphi_{-1,0} + \varphi_{0,1} + \varphi_{0,-1}] + 0{,}05\,[\varphi_{1,1} + \varphi_{-1,1} + \varphi_{1,-1} + \varphi_{-1,-1}]$. При этом в обоих случаях оценивается погрешность аппроксимации оператора Лапласа. Никаких оценок погрешности в решении, а также доказательства сходимости метода не дается. Кроме уравнения Лапласа, в работе рассматривается уравнение $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$. В качестве разностных уравнений берутся либо $\varphi_{0,0} = 0{,}25 \times [\varphi_{1,0} + \varphi_{-1,0} + \varphi_{0,1} + \varphi_{0,-1} + \frac{h}{2r}(\varphi_{1,0} - \varphi_{-1,0})]$, либо (более точно) $\varphi_{0,0} = [1 - 0{,}1h^2/r^2]^{-1}\,[g_{1,0}\varphi_{1,0} + g_{-1,0}\varphi_{-1,0} + 0{,}2\,(\varphi_{0,1} + \varphi_{0,-1}) + g_{1,1}(\varphi_{1,1} + \varphi_{1,-1}) + g_{-1,1}(\varphi_{-1,1} + \varphi_{-1,-1}) + g_{2,0}(\varphi_{2,0} - \varphi_{-2,0})]$, где, например, $g_{1,1} = 0{,}05 + 0{,}0125h/r$. В точках, где данное уравнение имеет особенность (ось $z = 0$), применяется разностное уравнение $\varphi_{0,0} = \frac{2}{3}\varphi_{1,0} + \frac{1}{6}(\varphi_{0,1} + \varphi_{0,-1})$. Много места (2/3 объема книги) уделено примерам. Приводятся 13 примеров вместе с графиками линий равного потенциала на применение указаных выше разностных аппроксимаций. При этом даются некоторые практические советы (выбор наиболее целесообразного шага и пр.).

Книга рассчитана на инженера-вычислителя.

*В. К. Саульев*

**446 К. Практическая математика. Начальные сведения с особым уклоном в сторону статистики и математической обработки экспериментальных данных. Занден** (Praktische Mathematik. Eine Einführung mit besonderer Berücksichtigung von Statistik und Ausgleichrechnung. Sanden Horst von, 3 Aufl., 128 S., B. G. Teubner, Leipzig, 1953, 3.20 DM) (нем.)

Книга является третьим дополненным изданием (первое издание вышло из печати в 1948 г.), предназначенным для студентов технических вузов и инженеров. Автор на небольшом объеме (128 стр.) дает первоначальные сведения, наобходимые инженеру, из теории приближенных вычислений (совсем отсутствует раздел численного интегрирования дифференциальных уравнений). Изложение доступное и сопровождается многочисленными примерами. Много внимания уделено вопросам статистики и математической обработки экспериментальных данных.

Содержание книги по главам: 1. Графические вычисления. Дается понятие функциональной шкалы, способы графического умножения, деления. Более подробно рассмотрено графическое интегрирование, вычисления на логарифмической линейке, различные виды функциональных сеток.

2. Теорема Тейлора. Формулы приближения. Даются приемы вычислений, основанных на использовании разложения по формуле Тейлора, метод Ньютона — Рафсона для решения одного и систем уравнений, схема Горнера, метод итерации для решения одного и системы уравнений.

3. Интегрирование, дифференцирование и интерполирование. Дается вывод формулы Симпсона с остаточным членом, а также других формул с равноотстоящими ординатами. Расматриваются случаи, когда подинтегральная функция задана в виде таблицы, аналитически. Рассматриваются несобственные интегралы. Вопрос интерполирования рассматривается весьма кратко (дана формула Ньютона и соответствующие ей формулы численного интегрирования и дифференцирования).

4. Статистика. Формулируется задача статистики, дается понятие кривой распределения, вывод основной формулы теории ошибок и ее практические применения.

5. Обработка данных по методу наименьших квадратов. Подробно рассматривается способ обработки результатов прямых и косвенных измерений, вопрос о сглаживании эмпирических функций и т. д.

6. Гармонический анализ и синтез при помощи тригонометрического интерполирования. Дается схема гармонического анализа периодической функции для случая 24 ординат, а также методы технического гармонического анализа.

*М. К. Керимов*

**447 К. Номограммы из выравненых точек и функция двух независимых переменных. Пенсмай** (Nomogrammes à alignement et fonction de deux variables independantes. Pincemaille Fernand, 29 pp., fig., autographie, Eyrolles, Paris, 1953, 240 fr.), Bibliogr. France, 1954, cep. 5, **143**, 78 (библ.)

448 **РЕЦ.** **Техника вычислений.** **Ларченко Е. Г.**, Геодезиздат, М., 1952, 7 р. 65 к. [Рецензия: **Буланов А. И.**, Сб. статей по геодезии, 1954, № 6, 61—64]

449 **Д.** **Полиномы Якоби и вычисление отдельных значений специальных функций.** **Кармазина Л. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

450 **Д.** **Подсчет объемов в проекциях с числовыми отметками.** **Авалишвили В. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Груз. политехн. ин-т, Тбилиси, 1954

## ТАБЛИЦЫ

451. **Таблицы бесселевых функций. Люстерник, Акушский, Диткин [Поправки].** **Йоффе** (Tablit͡sy Besselevykh funkt͡siĭ. (Matematicheskie tablit͡sy, no. 1) [Tables of Bessel functions]. Li͡usternik L. A., Akushskiĭ I. I͡a., Ditkin V. A. [Errata]. Joffe S. A.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 104—105 (англ.)

Приводится список поправок.

452. **Просмотренный и исправленный указатель таблиц для расчета течений сжимаемого газа.** **Томлинсон** (A revised index of mathematical tables for compressible flow. Tomlinson R. C.), Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1953 № 2691, 12 pp. (англ.)

См. РЖМех, 1954, 2891.

453 **К.** **Четырехзначные таблицы трансцендентных функций.** **Флагг** (Four-place tables of transcendental functions. Flugge W., 136 pp., tabl., bibliogr., Pergamon, London, 1954), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 216, 7 (библ.)

454 **К.** **16-значные натуральные логарифмы для аргумента от 0 до 5** (Natural logarithms, 0 to 5, to 16 places. National Bureau of Standards Applied Mathematical Series № 31, 501 pp., Governement Printing Office, Washington, 1953, 3.25 doll), Electronics, 1954, **27**, № 1, 396 (библ.)

455 **К.** **Семизначные таблицы логарифмов и тригонометрических функций** (Siebenstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, 423 S., Verl. Technik, Berlin, 1953, 15 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 10, 385 (библ.)

456 **РЕЦ.** **Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности $\chi^2$.** **Слуцкий** (Tablit͡su dli͡a vychisleniĭa nepolnoĭ Γ-funkt͡sii i funkt͡sii veroi͡atnosti $\chi^2$ [Tables for the computation of the incomplete gamma function and the probability function of $\chi^2$]. Slutskii E. E., edit. A. N. Kolmogorov, 71 pp., Leningrad, Acad. Nauk USSR, 1950) [Рецензия: **Тейкроу** (Teichroew D.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 240—241 (англ.)]

---

**См. также:** 223, 271, 314

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

457. **Математические методы решения задач релейной техники.** **Цюльсдорф** (Methoden der theoretisch-mathematischen Behandlung von Aufgaben der Schaltungstechnik. Zühlsdorf W.), Dtsch. Elektrotechnik, 1954, 8, № 2, 54—60 (нем.)

Статья написана на основе немецкого перевода книги М. А. Гаврилова «Теория релейно-контактных схем» (Gawrilow M. A., Relaisschalttechnik für Starkstrom- und Schwachstromanlagen, VEB Verlag Technik, Berlin, 1953).

Излагаются методы структурного анализа и синтеза релейно-контактных схем с помощью алгебры логики. Рассматривается применение вентильных элементов. Приводятся методы упрощения многоэлементных схем при заданной последовательности работы функциональных элементов схемы. Затем описывается символика, предложенная М. А. Гавриловым для последовательного и параллельного многополюсных соединений, и методика синтеза мостиковых схем с помощью многоугольника соединений. В конце статьи дается пример синтеза практической схемы (узел управления конвейерами) по математическим методам. Окончательная схема содержит 26 контактов против 168 контактов в первоначальной структурной формуле. При изложении примера автор описывает разработанный им метод синтеза сложных контактных многополюсников с помощью разбиения многополюсника на части и раздельного построения этих частей. В статье отмечается большое значение алгебры контактных схем в деле автоматизации производственных процессов.

*Г. Н. Поваров*

458. **О синтезе контактных многополюсников.** **Поваров Г. Н.**, Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 1075—1078

Описывается применение метода К. Шеннона универсальных многополюсников к синтезу контактных многополюсников некоторого общего вида и к синтезу симметрических контактных многополюсников. Вводится следующее определение: многополюсник с $p$ входами и $q$ выходами, или $(p, q)$-полюсник, называется разделительным, если равны нулю структурные проводимости $h_{ij}$ между его выходами $i$ и $j$ ($i, j = 1,2, \ldots, q$, $i \neq j$).

Формулируется теорема 1: Пусть $M$ — разделительный $(p, q)$-полюсник с проводимостями $f_{ij}^{(M)}$ между входом $i$ и выходом $j$ и пусть $N$ — любой $(r, s)$-полюсник с проводимостями $f_{ij}^{(N)}$ между входом $i$ и выходом $j$. Пусть каждый выход $i$ схемы $M$ соединен с одним и только одним входом $\tau(i)$ схемы $N$. Тогда проводимости $f_{ij}$ между входом $i$ и выходом $j$ результирующего $(p, s)$-полюсника

даются формулой

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{q} f_{ik}^{(M)} f_{\tau(k)j}^{(N)}.$$

Особо рассматриваются два вида схем — контактное дерево, реализующее конституенты единицы и являющееся разделительным $(1,2^n)$-полюсником с $2^{n+1}-2$ контактами, и универсальный многополюсник, реализующий между $2^{2^n}$ входами и единственным выходом все $2^{2^n}$ функций $n$ переменных. Указывается, что универсальный многополюсник $n$ переменных можно построить с $2\cdot 2^{2^n} - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^{2^i} + 2n - 4$ контактами.

Доказывается теорема 2: Любые $k$ булевых функций $n$ переменных $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1\, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_k$ $(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ реализуются при любом $m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, соединением группы $k$ контактных деревьев $n-m$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ и универсального многополюсника $m$ переменных $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$. Схема, полученная по теореме 2, содержит не более $\varphi_m = k(2^{n-m+1}-2) + 2\cdot 2^{2^m} - 2\sum_{i=0}^{m-1} 2^{2^i} + 2m - 4$ контактов. Доказывается далее, что при $\log_2 k + n \geqslant 1$ любые $k$ функций $n$ переменных реализуются не более чем с $[k2^{n+3}/(\log_2 k + n)] - 2k$ контактами и что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0$, что при $n > n_0$ любые $k$ функций требуют не более $(1+\varepsilon) \times [k2^{n+2}/(\log_2 k + n)] - 2k$ контактов. Аналогичный метод развивается для синтеза симметрических контактных многополюсников. Здесь роль контактных деревьев играют так называемые решетки элементарных симметрических функций, а роль универсального многополюсника — универсальный многополюсник симметрических функций. Получены соответствующие оценки. *М. Л. Цетлин*

**459. О функциональной разделимости булевых функций. Поваров Г. Н.,** Докл. АН СССР, 1954, 94, № 5, 801—803

Рассматривается важный в приложениях класс функционально разделимых булевых функций, т. е. функций, представимых в виде подстановки функции не менее двух переменных в функцию не менее двух же переменных. Дается критерий функциональной разделимости. Показано далее, что функции $f$ и $\bar{f}$ одновременно функционально разделимы либо функционально неразделимы, и что имеет место однозначность (в некотором смысле) разделения. Исследована связь функционально разделимых функций с симметрическими и показано, что единственными функционально разделимыми симметрическими функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются $x_1x_2\ldots x_n$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$, $x_1+x_2+\ldots+x_n$, $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n$, сумма по модулю два $x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n$ и ее отрицание $\bar{x}_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n$.

*М. Л. Цетлин*

**460. Реализация линейной функции в классе $\Pi$-схем. Яблонский С. В.,** Докл. АН СССР, 1954, 94, № 5, 805—806

Предлагается способ реализации линейной функции

$$\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \pmod 2$$

в классе параллельно-последовательных схем ($\Pi$-схем), т. е. указывается способ построения двухполюсной контактной $\Pi$-схемы, замыкающей полосы тогда и только тогда, когда число сработавших реле $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нечетно.

Число контактов, содержащихся в такой схеме, меньше чем $^9/_8 n^2$, где $n$ — число рассматриваемых реле.

Полученный в статье порядок оценки числа контактов в схеме, реализующей функцию $\Phi_n$, совпадает, как отмечает автор, с порядком оценки, полученной ранее Риорданом (Shannon C. E., BSTJ, 1949, 28, № 1, 59). *А. Г. Лунц*

**461. Анализ арифметическими методами вычислительной цепи с обратной связью. Роббинс** (An analysis by arithmetical methods of a calculating network with feedback. Robbins L. C.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 61—67 (англ.)

Используя символику узкого исчисления предикатов, автор производит арифметическими методами анализ блок-схемы вычислительного устройства, предназначенного для преобразования чисел, представленных симметричным двоичным кодом (кодом Грея), в нормальную двоичную систему.

Это преобразование арифметически может производиться по формуле $a_j = \varphi\left(\sum_{k=j}^{n} b_k\right)$, где $\varphi(2m) = 0$, $\varphi(2m-1) = 1$, $a_j$ — цифры числа $N$ в нормальной двоичной системе, $N = \sum_{j=0}^{n} a_j 2^j$, а $b_k$ — «цифры» того же числа, представленного симметричным двоичным кодом, $N = b_n b_{n-1}\ldots b_k\ldots b_1 b_0$. Для этого преобразования может быть использована также следующая формула: $a_j = \sum_{k=j}^{n} {}_2 b_k$, где $\sum_2$ — знак сложения по модулю 2.

Эти формулы, однако, непосредственно непригодны для осуществления рассматриваемого преобразования на машинах последовательного действия, так как ввод чисел в эти машины осуществляется обычно, начиная с низших разрядов этих чисел. При вычислении же по этим формулам каждая двоичная цифра $a_j$ числа $N$ определяется старшими разрядами $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_j$ преобразуемого кода $b_n b_{n-1}\ldots b_j\ldots b_1 b_0$ того же числа.

Анализируемая в работе блок-схема осуществляет преобразование кода $b_n b_{n-1}\ldots b_j\ldots b_1 b_0$ числа $N$ в его нормальное двоичное представление $a_n a_{n-1}\ldots a_j\ldots a_1 a_0$ при вводе в эту схему «цифр» $b_j$ в возрастающей последовательности номеров разрядов: $b_0, b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Анализ этой схемы

осуществляется посредством дедуктивного доказательства формул

$$1 \leqslant m \& 0 \leqslant n < \alpha^2 \Rightarrow E(m\beta + n) = 0, \qquad (1)$$

$$1 \leqslant m \& 0 \leqslant j < \alpha \Rightarrow E(m\beta + \alpha^2 + j) = \varphi\left(\sum_{k=j}^{\alpha-1} I(m\beta + k)\right), \qquad (2)$$

где & и $\Rightarrow$ — знаки конъюнкции и импликации соответственно; $I$ — импульсы напряжения, подаваемые на вход схемы, $E$ — импульсы напряжения, получаемые на выходе схемы, $m$ — любое неотрицательное число, $\beta = \alpha(\alpha + 1)$, где $\alpha$ — число двоичных разрядов в преобразуемых числах.

Кроме обычных булевых функций $A \vee B$, $A \wedge B$ и $\nu A$ (максимум, минимум и дополнение $1 - A$ соответственно), для описания анализируемой схемы и доказательства формул (1) и (2) вводятся следующие небулевы функции:

$$\delta_0 A(n),\ \delta_1 A(n),\ \gamma_0(A, B)(n) \text{ и } \gamma_1(A, B)(n).$$

Функция $\delta_0 A(n)$ определяется следующими равенствами:

(а) $\delta_0 A(0) = 0$, (б) $\delta_0 A(n+1) = A(n)$.

Функция $\delta_1$ отличается лишь тем, что $\delta_1 A(0) = 1$. $\gamma_0$ определяется следующими условиями:

(а) $\gamma_0(A, B)(0) = 0$;

(б) Если $A(n) = 0$ и $B(n) = 1$, то $\gamma_0(A, B)(n+1) = 0$;

(в) Если $B(n) = 0$, то $\gamma_0(A, B)(n+1) = \varphi(\gamma_0(A, B)(n) + A(n))$, $\gamma$ определяется так же, за исключением того, что $\gamma_1(A, B)(0) = 1$. Для $A(n) = 1$ и $B(n) = 1$ функции $\gamma_0$ и $\gamma_1$ не определены, но эта комбинация практически никогда не встречается при работе анализируемой схемы.

В некоторых промежуточных формулах допущены опечатки. *В. И. Шестаков*

**462. Синтез $2n$-полюсников в виде цепей, содержащих минимальное число элементов. Теллеген** (Synthesis of $2n$-poles by networks containing the minimum number of elements. Tellegen B. D. H.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 1—18 (англ.)

Алгоритм осуществления схемы по определенно-положительной матрице $\| Z_{ik} \|$, при котором число элементов схемы будет минимальным, может быть построен на основе обобщения методики, предложенной Брюном (Brune O., J. Math. and Phys., 1931, **10**, 191) для осуществления положительной функции в виде полного сопротивления (проводимости) двухполюсника.

Эта обобщенная методика такова:

Пусть $\| Z_{ik}(\lambda) \|$ — заданная матрица полного сопротивления, а $\| R_{ik} \|$ — матрица действительных частей ее элементов. Вычтем из элемента $R_{11}$ этой матрицы величину $R$ такую, чтобы определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} - R & \dots & R_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{1n} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

вдоль всей мнимой оси $\lambda$ был неотрицательным, что будет иметь место при условии $R \leqslant \Delta/\Delta_{11}$, где $\Delta = |R_{ik}|$; $\Delta_{11}$ — минор, соответствующий элементу $R_{11}$.

Определив минимальное значение $\Delta/\Delta_{11}$, найдем значение $R$, при котором $\Delta_2$ обращается в нуль в какой-либо точке на мнимой оси $\lambda$, соответственно $|Z'_{ik}| = |Z_{ik} - R|$ в этой точке принимает чисто мнимое значение или обращается в нуль. Если $|Z'_{ik}|$ обращается в нуль при $\lambda = 0$ или $\lambda = \infty$, то элементы обратной матрицы будут иметь в этих точках полюсы, которые могут быть непосредственно отщеплены и реализованы. Если $|Z'_{ik}|$ обращается в нуль при конечном значении частоты $\sigma$, дальнейшее построение проводится различным образом в зависимости от того, какое значение принимает $|Z'_{ik}|$ в этой точке мнимой оси. Если $|Z'_{ik}|$ принимает отрицательное мнимое значение в точке $\lambda = \pm j\sigma$, то может быть создан простой нуль путем вычитания матрицы первого ранга $X = \| j\alpha h_i h_k \|$, где $h_i$, $h_k$ — вещественные числа; $\alpha = \pm 1$. Физически матрице $X$ соответствует многополюсник, состоящий из одной индуктивности $L_1$ и $n-1$ идеальных трансформаторов. Если $|Z'_{ik}|$ при $\lambda = \pm j\sigma$ принимает отрицательное мнимое значение, то $L_1$ — отрицательная индуктивность. В этом случае $\| Z^{(1)}_{ik} \| = \| Z'_{ik} \| - \| j\alpha h_i h_k \|$ будет положительной матрицей, определитель которой имеет нуль при $\lambda = \pm j\sigma$ и полюс при $\lambda = \infty$.

Возможность в любом случае подобрать коэффициенты $h_i$, $h_k$ вытекает из следующей теоремы:

Если детерминант положительной матрицы $n$-го ранга $\| Z_{ik}(\lambda) \|$ равен нулю, то всегда можно подобрать некоторую совокупность таких вещественных чисел $\beta_k$, что

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{ik}\beta_k = 0$$

(Peremans W., Duparc H. J. A., Lekkerkerker C. G., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1952, A55, 24). Выделяя в элементах матрицы $\| Z_{ik} \|$ слагаемые, соответствующие нулю при $\lambda = \pm j\sigma$ и полюсу при $\lambda = \infty$, можно их осуществить аналогично тому, как осуществляют положительную функцию по методу Брюна. Так же как при осуществлении функции по методу Брюна, после каждого цикла, состоящего из трех операций, порядок осуществляемой матрицы снижается на 2. В отличие от осуществления положительной функции посредством двухполюсника, где одному циклу операций соответствует включение одного идеального трансформатора и одного емкостного элемента, здесь одному циклу соответствует схема, состоящая из $n-1$ идеальных трансформаторов (где $n$ — ранг матрицы) и одного емкостного элемента. Процесс создания и отщепления полюсов продолжается до получения матрицы, все элементы которой являются положительными числами. Эта матрица может быть непосредственно реализована в виде $n$ активных двухполюсников, соединенных идеальными трансформаторами.

Аналогично может быть проведено осуществление матрицы $\| Z_{ik} \|$ и в том случае, когда определитель $Z_{ik}(j\sigma) - R|$ принимает в точке $\lambda = \pm j\sigma$ положительное мнимое значение.

Описанная методика позволяет получить $2n$-полюсники, содержащие минимальное число элементов. Это число, как показано в статье, равно

$$p(n+1) + \frac{1}{2} n(n+1),$$

где $n$ — ранг матрицы $\|Z_{ik}\|$, а $p$ — порядок данного $2n$-полюсника, т. е. порядок дифференциального уравнения, которое получается из уравнения $|Z_{ik}+R_{ik}|=0$ при замене параметра $\lambda$ оператором $\frac{d}{dt}$ и раскрытии определителя $|Z_{ik}+R_{ik}|$.

*В. А. Тафт*

**463. Заметка о постулатах электрических цепей. Арсов** (A note on the network postulates. Arsove Maynard G.), J. Math. and Phys., 1953, 32, № 2—3, 203—206 (англ.)

Отметив отсутствие полного параллелизма между формулировками I и II закона Кирхгофа, автор, оставляя неизменной формулировку первого закона, изменяет несколько формулировку второго. Этот несколько измененный закон интерпретируется затем геометрически в терминах ортогональных пространств некоторого векторного пространства.

Электрической цепью автор называет упорядоченную тройку $N=(G, E, Z)$, где $G$ — линейный граф, имеющий $n$ ветвей и $m$ узлов, и притом такой, что ни одна ветвь в нем не имеет совпадающих друг с другом концов, $E$ — антисимметричная функция на $\bar{G}$, $Z$ — антисимметричная функция на $\bar{G}\times\bar{G}$, где $\bar{G}$ — множество всех $2n$ ориентированных ветвей. $E$ называется эдс, а $Z$ — импедансом (полным сопротивлением) цепи $N$.

Любой базис в $G$ задает матрицу узлов $F$, определяемую следующими условиями:

$$F_{jk}=\begin{cases}-1, & \text{если узел } P_j \text{ является началом ветви } B_k,\\ 0, & \text{если узел } P_j \text{ не является ни началом, ни концом ветви } B_k,\\ 1, & \text{если узел } P_j \text{ является концом ветви } B_k.\end{cases}$$

Для данной цепи $N$ проблема (linear network problem) заключается в определении двух антисимметричных функций $V$ и $I$ на $G$ таких, что:

1) для любого базиса $\beta$ в $G$ векторы $V$ и $I$ удовлетворяют матричному уравнению

$$V=E-ZI; \tag{1}$$

2) для матрицы узлов $F$, определенной посредством $\beta$,

$$FI=0; \tag{2}$$

3) все векторы $I$, удовлетворяющие (2), удовлетворяют также

$$V^*I=0. \tag{3}$$

Автор отмечает, что условие (2) представляет собой I закон Кирхгофа, а равенство (3) выражает закон сохранения энергии в цепи $N$. Данное здесь определение инвариантно, как показано в заметке, относительно изменения базиса.

В случае, когда ранг $\rho$ матрицы $F$ есть $n$, проблема имеет тривиальное решение: $I=0$, $V=E$. Когда $\rho<n$ уравнение (2) имеет решение $I=Ai$, где $A$ есть некоторая матрица порядка $n\times(n-\rho)$.

Отсюда следует, что наша проблема имеет решение

$$\begin{cases} I=A(A^*ZA)^{-1}A^*E,\\ V=E-ZA(A^*ZA)^{-1}A^*E,\end{cases}$$

которое будет однозначным в случае, если $A^*ZA$ является неособенной матрицей.

В заключение показано, что II закон Кирхгофа в его обычной формулировке является следствием принятых постулатов и что, наоборот, из II закона Кирхгофа следует равенство $A^*V=0$ и, следовательно, условие (3).

*В. И. Шестаков*

**464. Матричные и тензорные методы анализа электрических цепей. Сопер** (Matrix and tensor analysis of eleetrical networks. Soper P. F.), Brit. Electr. and Allied Manufact. Assoc. J., 1953, 60, № 196, 327—334 (англ.)

Заканчивается рассмотрение примера, начатого в первой части этой статьи (РЖМат, 1954, 3860). Рассмотрены также еще несколько простых примеров применения матричных методов для анализа электрических цепей. Новых результатов ни в этой части, ни в первой части статьи не содержится. Ссылки на литературу отсутствуют.

*В. И. Шестаков*

**465. Расчет нагруженных в узлах электрических сетей при помощи матриц. Циммерман** (Berechnung knotenpunktsbelasteter Maschennetze mit Matrizen. Zimmermann F.), Elektrotechn. Z., 1953, 74, № 2, 45—50 (нем.)

Матричная алгебра используется для расчета электрических сетей методом контуров и методом узлов.

1. Метод контуров. Даны $p$ узлов сети, из которых $p$-й узел является питающим, $p-1$ узловых токов $I_I, I_{II}, \ldots, I_{(p-1)}$, $n$ ветвей с электродвижущими силами $E_i$ и комплексными сопротивлениями $Z_i$ и $Z_{ik}$. Ищутся токи в ветвях $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Вводятся столбцевые матрицы $E=(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, $I_B=(I_I, I_{II}, \ldots, I_{(p-1)})$ и квадратная матрица $Z=\|Z_{ik}\|_1^n$, где $Z_{ii}=Z_i$. Основные соотношения в узлах (I закон Кирхгофа) используются для выражений столбца всех токов $I=(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ через столбец независимых токов $I'=(I'_1, I'_2, \ldots, I'_u)$ $(u=n-p+1)$ и столбец $I_B$ при помощи прямоугольных матриц $c$ и $c_B$:

$$I=cI'+c_BI_B.$$

Исходя из баланса мощностей, автор находит матричное выражение для столбца токов в ветвях

$$I=c(c_tZc)^{-1}c_t(E-Zc_BI_B)+c_BI_B,$$

где индекс $t$ означает переход к транспонированной матрице.

2. Метод узлов. В отличие от метода контуров вместо сопротивлений $Z_i, Z_{ik}$ даны проводимости $Y_i, Y_{ik}$; при этом полагаются $Y_{ik}=0$. Ищутся разности напряжений вдоль ветвей $U_1, U_2, \ldots, U_n$ и токи $I_1, I_2, \ldots, I_n$. С помощью $u=n-p+1$ соотношений для независимых контуров (II закон Кирхгофа) столбец $U=(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ выражается через столбец независимых разностей напряжений $U'=(U'_1, U'_2, \ldots, U'_{(p-1)})$ с помощью прямоугольной матрицы $c$:

$$U=cU'.$$

Аналогично

$$U_B=c_BU',$$

где $U_B=(U_I, U_{II}, \ldots, U_{(p-1)})$, а $U_I, U_{II}, \ldots, U_{(p-1)}$ — разности между значениями потенци-

ала в узлах (1), (2), ..., $(p-1)$ и в питающем узле $(p)$. Снова, опираясь на баланс мощностей, автор определяет $U$ и $I$:

$$U = c\,(c_t Y c)^{-1}(c_t Y E - c_{Bt} I_B), \quad I = Y(E-U),$$

где $Y$ — диагональная матрица с диагональными элементами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Применение полученных формул иллюстрируется примерами.

*Ф. Р. Гантмахер*

**466 РЕЦ. Теория релейно-контактных схем. Гаврилов** (Relaisschalttechnik für Starkstrom- und Schwachstromanlagen. Gawrilow M. A., 324 S., 217 Bilder, VEB Verlag Technik, Berlin, 1953, 36 DM [**Рецензия: Цюльсдорф** (Zühlsdorf), Dtsch. Elektrotechnik, 1954, 8, № 2, 53—54 (нем.)]

Рецензия на книгу М. А. Гаврилова «Теория релейно-контактных схем» (Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950), вышедшую в переводе на немецкий язык.

**467 РЕЦ. Введение в теорию четырехполюсника электрической техники связи. Фельдткеллер** (Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Feldtkeller R., 6. Aufl., XI + 186 S., ill., S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1953, 15 DM) [**Рецензия: Лутце** (Lutze E.), Z. angew. Phys., 1953, 5, № 11, 440 (нем.)]

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

**468. МАНИАК. Демут, Джэксон, Клейн, Метрополис, Орведал, Ричардсон** (MANIAC. Demuth Howard B., Jackson John B., Klein Edmund, Metropolis N., Orvedahl Walter, Richardson James H.), Proc. Assoc. Comput. Mach. Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 13—17 (англ.)

Универсальная цифровая вычислительная машина МАНИАК (MANIAC) была построена к марту 1952 г. в Лос-Аламосской лаборатории (Los Alamos Scientific Laboratory). Машина параллельного действия, содержит 2500 электронных ламп и 800 германиевых диодов. Кодирование одноадресное, код двоичный. Арифметическое устройство включает 5 регистров и сумматор. Внутреннее запоминающее устройство на электроннолучевых трубках имеет емкость в 1024 числа. Количество трубок равно количеству разрядов в числах (40). Среднее время выборки 12 *мксек*; время рабочего цикла (как и цикла регенерации) 8 *мксек*. Отбраковка трубок для электронного запоминающего устройства производится прямо на машине по числу обращений к любой точке растра без регенерации. Наименьшее допустимое число обращений равно 68; есть трубки, допускающие свыше 1000 обращений. В качестве внешнего запоминающего устройства предполагалось установить в январе 1953 г. магнитный барабан емкостью в 10000 чисел.

Ввод данных — с перфоленты (71 десятизначное число в 1 мин.); вывод — либо на перфоленту (81 число в 1 мин.), либо на печать (49 чисел в 1 мин.). Имеется вспомогательное оборудование для размножения лент. Предполагается позже ввести фотоэлектрическое считывание с перфоленты и внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте.

Система питания включает два генератора по 400 *в*, работающих на аккумуляторную батарею, с которой снимаются необходимые номиналы напряжения. Рассеиваемая машиной мощность в 25 *квт* поглощается установкой кондиционирования.

Для сокращения времени проверки программы последнюю разбивают на участки с выдачей на печать промежуточных результатов в конце каждого участка. Эти результаты затем просчитываются вручную, и в случае расхождения, если ошибка не обнаружена сразу, соответствующий участок проверяется на машине команда за командой, автоматически, с выдачей на печать результатов каждой операции. Для сокращения времени на исправление ошибок в ходе вычисления предполагается один раз в час выдавать на печать все содержимое запоминающего устройства, чтобы после сбоя не начинать с самого начала программы; при этом использование рабочего времени машины повышается до 70%. Тестовая проверка машины полностью не удовлетворяет; проверка запоминающего устройства разработана лучше.

В результате эксплуатации выяснилось, что внезапное выключение питания (кроме накала трубок) не приводит к появлению неисправностей. Включение накала производится плавным подъемом напряжения в течение 2 мин. Перед началом вычислений машина должна быть прогрета в течение получаса.

Из 862 час. работы на вычисления использовалось 675 час. Среднее время безошибочной непрерывной работы машины за 862 часа оказалось равным 4 час. Средняя потеря времени на исправление машины при каждой остановке составляет около 30 мин. Анализ двенадцати из решенных задач показал, что 10% всех команд составляют умножение и деление, остальные команды по существу представляют сложение.

*В. К. Зейденберг*

**469. Усовершенствования вычислительной машины СЕАК** (SEAC improvements increase computing power), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1954, 38, № 1, 8—13 (англ.)

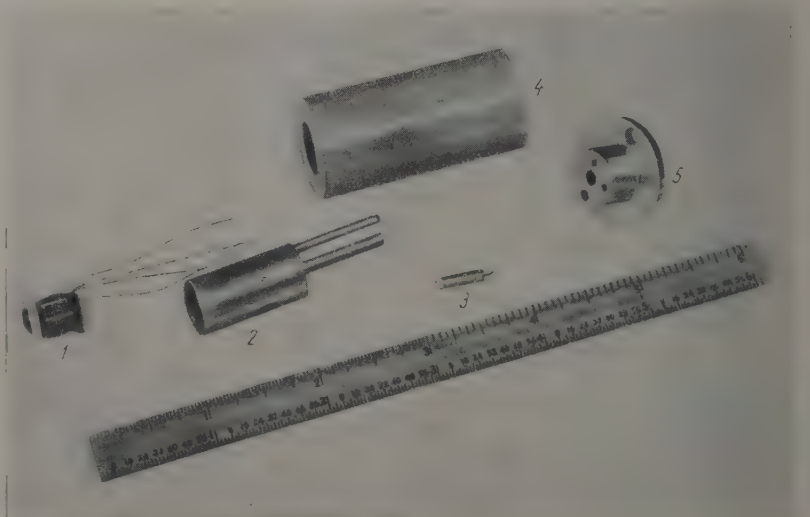
СЕАК (SEAC — Standards Eastern Automatic Computer) является быстродействующей вычислительной машиной последовательного типа, работающей на частоте 1 *Мгц*, имеющей запоминающее устройство на акустических линиях задержки на 512 адресов. Объем арифметического узла — 45 двоичных разрядов, первоначальное количество операций — 11. За трехлетний период эксплуатации машина претерпела серьезные изменения, которые привели к увеличению числа ламп с 750 до 1300 и числа германиевых диодов с 10 500 до 16 000. Введено в действие параллельное электростатическое запоминающее устройство на 512 адресов, что резко повысило скорость работы машины. Добавлено внешнее запоминающее устройство на магнитных лентах. Количество операций возросло с 11 до 16. Введено контрольное устройство, позволяющее просматривать любую инструкцию программы.

Вместо четырехадресной системы программирования стала применяться трехадресная. Кроме того, в машине изменен целый ряд элементов, что привело к большей надежности в работе. За время эксплуатации в течение трех лет в машине вышло из строя 1 300 ламп (2/3 всех ламп в машине составляют двойные триоды типа 6AN5), причем за 15 первых месяцев эксплуатации только 18 ламп были заменены в рабочее время. Это объясняется регулярной профилактической проверкой ламп. Лампа считалась негодной, если при понижении накала до 5,7 *в* анодный ток ее падал более чем на 25%. 55% ламп выходило из строя благодаря потере эмиссии, остальные — за счет механических повреждений, замыканий внутри баллона и пр. Статистикой установлено, что средний срок службы ламп составил 8700 час. Выход из строя германиевых диодов составил 0,02% от общего количества на каждую 1000 часов работы машины.

На машине было решено около 90 задач, причем решение двух из них заняло 57% всего рабочего времени, т. е. 11 000 час. Кроме различных задач для промышленности и научных учреждений, на машине были сосчитаны таблицы эллиптических функций, гамма-функций комплексного аргумента и т. д. Среднее рабочее время машины составило 72%, в течение лучшего квартала — 82% и в течение лучшей недели — 93,5%.

При проектировании запоминающего устройства на элетростатических трубках была выдвинута новая теория запоминания данных на экране трубки. Вместо принятой «диодно-емкостной» теории была предложена «триодная» теория, по которой все процессы в районе экрана трубки отождествляются с процессами в трехэлектродной лампе, причем роль сетки выполняет пространственный заряд. Основными трудностями при проектировании запоминающего устройства на электронолучевых трубках оказались большая неравномерность фосфорного покрытия экранов трубок (по этой причине только одна из пяти серийно выпускаемых трубок оказывалась пригодной для использования в запоминающем устройстве) и получение высокого коэффициента повторных обращений. В период с 1 июня по 1 октября 1953 г. рабочее время запоминающего устройства составило 115 час. Период работы запоминающего устройства без сбоев составлял от 10 мин. до 9 час.

*Л. С. Легезо*




К реф. 470

**470. Новый метод магнитной записи при помощи плавающей в воздухе головки. Хейген** (Air floating, a new principle in magnetic recording of information. Hagen Glenn E.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 8, 23—25 (англ.)

В связи с широким применением магнитных барабанов в качестве запоминающих устройств для электронных вычислительных машин возникает вопрос об увеличении их емкости. Увеличение емкости для барабана малого диаметра сопряжено с увеличением количества оборудования и усложнением схемы управления.

Увеличение диаметра барабана ограничивалось до сих пор технологическими возможностями получения достаточно постоянного малого зазора между головкой и поверхностью барабана.

Фирмой «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research, Inc.) разработана система, которая позволяет головкам удерживаться на определенном расстоянии от барабана при помощи воздушной пленки, образованной быстрым вращением барабана, и эффекта Бернулли, получающегося в результате подачи воздуха под высоким давлением между головкой и барабаном.

Воздушная пленка между барабаном и головкой предотвращает падение головки на барабан, а эффект Бернулли не дает ей возможности отойти от барабана, как бы присасывая головку к его поверхности. Таким образом осуществляется слежение за поверхностью баравана, и головка плавает в воздухе или находится как бы на воздушной подушке.

Применение этого принципа даст возможность использовать сварные магнитные барабаны большого диаметра, свернутые из листового металла с нанесенным на его поверхность магнитным материалом. Данные в этом случае могут записываться даже плотнее, чем на литых магнитных барабанах малого диаметра.

В статье описываются две модели, на которых проводились эксперименты. В первой модели использовался магнитный барабан, сделанный из листового материала, диаметром 914 *мм*, с биением по

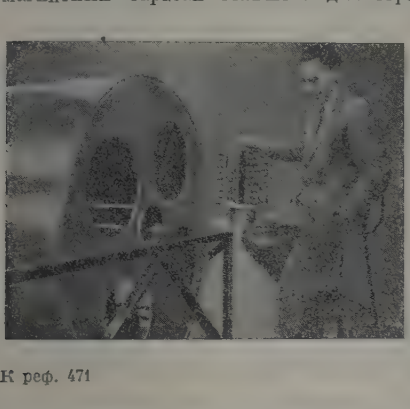
поверхности более 0,05 *мм*. Зазор между головкой и барабаном поддерживался равным 10 *μ*. Изменения в считываемом сигнале не превосходили 5%.

Во второй модели применялась более совершенная магнитная головка, которая устанавливалась в рабочее положение под действием воздушного давления; если же воздушного давления не хватало, то головка под действием пружины автоматически отходила от барабана, оставляя его поверхность неповрежденной. Эта головка состоит из 5 частей (см. фото): магнитного элемента *1*, цилиндрического поршенька *2*, на котором он монтируется; возвратной пружины *3*; цилиндрического алюминиевого каркаса *4*, в который входит поршенек; задней крышки каркаса *5*. Воздух поступает через 2 маленьких отверстия с одной и с другой сторон головки, когда она помещена в поршенек.

Отмечается, что продувка воздуха не только фиксирует положение головки на нужном расстоянии от поверхности, но и обеспечивает очистку поверхности барабана от случайных частиц магнитного материала и т. п., которые сдуваются. *Я. А. Хетагуров*

**471. Цифровая машина АЛЬВАК...** (ALWAC digital computer...), Aviat. Week, 1954, **60**, № 5, 45 (англ.)

Краткое сообщение о том, что в машине АЛЬВАК (РЖМат, 1954, 5291) будет использован для запоминания магнитный барабан большого диаметра (см.



К реф. 471

фото, слева) с плавающими головками (см. реф. 470). Указывается, что запоминающее устройство с этим барабаном будет иметь в 200 раз больший объем памяти, чем с барабаном старого типа (для сравнения показан на фото справа). *Д. П.*

**472. Сообщение о проекте малой автоматической вычислительной машины в Дрезденской высшей технической школе Леман** (Bericht über den Entwurf eines kleinen Rechenautomaten an der Technischen Hochschule Dresden. Lehmann N. Joachim), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 262—270 (нем.)

В Институте прикладной математики Дрезденской высшей технической школы автором, начиная с 1948 г., разрабатывались проекты малых автоматических вычислительных машин с программным управлением. В более широких масштабах работы продолжаются с 1950 г.

Дается описание малой автоматической вычислительной машины, изготовление которой намечено на 1954 г. Вычисление проводится с 20-значными десятичными числами при фиксированной запятой. Запятая поставлена после шестого десятичного знака. Машина работает по двоичной системе счисления. При работе используется последовательная схема.

Запоминающее устройство представляет собой магнитный барабан диаметром 20 *см*, длиной 25 *см*, вращающийся со скоростью 6000 об/мин. Среднее время выборки числа 5 мсек. На каждой дорожке записывается 1120 двоичных цифр (16 чисел). Количество дорожек на барабане равно 128. Емкость магнитной памяти 2048 чисел. Для чтения чисел по всем 128 дорожкам нужно иметь 128 магнитных головок и более 100 ламп. В целях экономии составляются две группы по 8 головок. Каждая группа головок может смещаться в одно из восьми положений. Время, затрачиваемое на передвижение группы головок, составляет 30—50 мсек. Таким образом при помощи 16 магнитных головок может быть прочтено (или записано) число с любой дорожки магнитного барабана. Благодаря устройству, сдвигающему группы головок, время вычислений возрастает примерно на 10%, в то время как экономия в элементах устройства достигает 80%. Машина работает по одноадресной системе программирования. Время выполнения сложения 6 мсек., умножения 30 мсек., деления 42 мсек.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую производится внутри машины по известной схеме Горнера.

Ввод чисел в машину осуществляется при помощи перфорированной ленты. В дальнейшем предполагается ввод чисел при помощи магнитной ленты. Вывод результата осуществляется либо с помощью перфолент, либо с помощью печатающего устройства.

В машине использовано немногим более 500 ламп. Скорость работы машины составляет в среднем 50 операций в 1 сек. *Н. Н. Поснов*

**473. Описание электронной вычислительной машины Высшего исследовательского института. Эстрин** (A description of the electronic computer at the Institute for Advanced Studies. Estrin Gerald), Proc. Assoc. Comput. Mach. Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 95—109 (англ.)

Описание машины ИАС (РЖМат, 1954, 3485), дополненное фотографиями и блок-схемами машины и отдельных узлов. Указаны другая потребляемая мощность (10 *квт* вместо 16 *квт*) и другое время выборки из электростатического запоминающего устройства (12 μсек. вместо 25 μсек.). *Н. Я. Матюхин*

**474. Окридж получает вычислительную машину** (Oak Ridge gets computor), Steel, 1953, **133**, № 7, 113 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4936—4938.

**475. Обзор современных электронных вычислительных машин. Даинелли, Апаро** (Considerazioni sulle più recenti macchine calcolatrici elettroniche ed il loro impiego. Dainelli Dino, Aparo Enzo), Ricerca scient., 1953, **23**, № 9, 1528—1549 (итал.; резюме франц., англ., нем.)

Рассматриваются принципы работы цифровых машин, вопрос наиболее рационального выбора скорости работы машин с точки зрения стоимости, эксплуатации, сложности устройства, решаемых задач и т. д. Указывается, что в машине «Марк-IV» (Mark IV) применено внутреннее запоминающее устройство на статических магнитных линиях задержки объемом в 240 чисел по 68 двоичных разрядов в числе (17 десятичных в двоично-десятичной системе). Выбор чисел последовательно-параллельный (параллельно считываются 4 двоичных разряда, представляющих одну десятичную цифру), время выборки 1,2 мсек. *Н. Я. Матюхин*

**476. Электронный психолог** (Electronic psychologist), Yale Scient. Mag., 1953, **28**, № 3, 42 (англ.)

Сообщение об электронной машине ЭПАК (EPAC—Electronic Profile Analyzing Computer) для сравнения ответов на психологические тесты. Ответы даются в цифровой форме, и машина вычисляет сумму квадратов отклонений от стандартных ответов. Машина построена в Корнельском университете (Итака, шт. Нью-Йорк, США) психологом Ф. Розенблаттом (F. Rosenblatt) для обработки результатов ряда тестов из его диссертации на степень доктора философии. *К. С.*

**477. ЭПАК** (Idiot brain), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 18, 279 (англ.)

Фото машины ЭПАК (см. реф. 476).

**478. Электрическая модель для изучения деформации балки. Малавар, Бошер** (Modèle analogique électrique pour l'étude de la flexion des poutres. Malavard Lucien, Bosch er Jean), C. r. Acad., sci., 1953, 236, № 11, 1130—1133 (франц.)

Уравнения изгиба балки

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = p(x)$$

($I(x)$ — момент инерции, $E$ — модуль упругости, $p(x)$ — нагрузка, $M$ — момент изгиба) решаются методом конечных разностей путем замены следующими алгебраическими уравнениями:

$$w_i + w_\kappa - 2w_j = \frac{M_j \varepsilon^2}{EI_j}; \quad M_i + M_\kappa - 2M_j = p_j \varepsilon^2, \quad (1)$$

где $i$, $j$, $k$ — три равноотстоящих узла отрезка $AB$. Физическая реализация указанного приближенного метода осуществляется на электрической модели, состоящей из двух «одномерных» электрических цепей. При этом узлы первой цепи соединены активным сопротивлением $\rho$, второй — $r$, а соответствующие узлы обеих цепей соединены активным сопротивлением $R$; кроме того, на узлы второй цепи подается постоянный потенциал $u$ через активное сопротивлеаие $\Re$. При $R_j \gg \rho$ в $j$-м узле на основе закона Кирхгофа имеет место $V_i + V_k - 2V_j \approx \approx -\bar{V}_j \rho / R_j$ ($V$ — потенциал в узлах первой цепи), т. е. реализация первого из (1) уравнения. Аналогично при $r \ll R_j$ и $\Re$ реализуется на второй цепи второе уравнение. Рассматриваются в физической интерпретации всевозможные краевые условия: например, в случае простой опоры в $A$ ($M = W = 0$ в $A$) потенциалы на левых концах обеих цепей равны нулю; а сила тока, проходящего через левый конец второй цепи, дает значение реакции опоры. Приводится пример решения на электрической сетке задачи о балке, лежащей на трех опорах.

Авторы утверждают, что модель может быть использована и для решения задач более общего типа (например, системы двух балок). На модели целесообразно решать серии задач, зависящие от некоторых параметров. *В. К. Саульев*

**479. Решение задач динамики стержневых систем на электрических моделях. Бондарь Н. Г.,** Инженерный сб., 1953, **16**, 87—108

Рассматривается способ использования пассивных электрических цепей из реактивных элементов для решения задач динамики упругих систем, основанный на предложенном Л. А. Люстерником (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 2 (30), 198—200) методе моделирования симметрических матриц. Для моделирования по этому способу уравнения упругой системы должны быть составлены в канонической форме с помощью коэффициентов влияния.

Способ пригоден для моделирования только таких упругих систем, у которых главные коэффициенты ($\delta_{ii}$) равны или больше суммы абсолютных величин всех побочных коэффициентов ($\delta_{ik}$), входящих в данное уравнение, т. е.

$$\delta_{ii} \geqslant \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} |\delta_{ik}|.$$

*И. М. Тетельбаум*

**480. Решение краевых задач для уравнений Штурма-Лиувилля на электрической сетке. Суэнсон** (The solution of Sturm-Liouville problems by D-C network analyzer. Swenson George W., Jr.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 811—813 (англ.)

Уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + \lambda g(x)\varphi = 0$$

с нулевыми краевыми условиями заменяется разностным уравнением

$$(4f_0 - f_2 + f_1)\varphi_1 + (4f_0 + f_2 - f_1)\varphi_2 - 4(2f_0 - \lambda g_0 h^2)\varphi_0 = 0,$$

которое реализуется на электрической сетке из активных сопротивлений на основе закона Кирхгофа. При этом «отрицательные сопротивления» создаются посредством введения в каждом узле самостоятельного источника напряжения, что, по мнению авторов, целесообразнее, чем введение емкостных и индуктивных сопротивлений. Для более простого уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda p(x)\varphi = 0$$

конечно-разностный аналог имеет вид $-\varphi_1 - \varphi_2 + (2 - \lambda p_0 h^2)\varphi_0 = 0$, что требует только одного дополнительного источника питания.

Дается анализ решения уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\omega^2 h^2 I}{C}\theta = 0$$

с граничными условиями $\theta|_{x=0} = 0$, $C \frac{d\theta}{dx} -$

$-7\omega^2 IL/10\,|_{x=L}=0$ на электрической сетке. Процесс решения итеративный, при этом высшие собственные значения находятся с меньшей точностью.

*В. К. Саульев*

481. **Маленькое вычислительное устройство** (Small computer...), Prod. Engng, 1954, 25, № 3, 9 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1869. Сообщается, что устройство в пять раз меньше по весу и объему, чем ранее употреблявшиеся, и удобно для массового выпуска. *Д. П.*

482. **Автоматические счетные машины. Перечень. 3-й список, сводный, по состоянию на 3 сентября 1953 г.** (Automatic computers — List. Ed. 3, cumulative, information as of Sept. 3, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 13—16 (англ.)

Перечень автоматических счетных машин, содержащий следующие данные: наименование, организация-изготовитель, назначение (универсальная машина или специального назначения), общая характеристика (цифровая машина или моделирующее устройство; электронная, релейная или механическая машина); размер (малая, средняя или большая); количество (0, если не закончена; 1; 2; малое количество от 2 до 6; среднее — от 7 до 30; большое — свыше 30; неизвестное количество).

В перечень включено 96 наименований машин, относительно которых указано, что 73 являются цифровыми, 20 — машинами непрерывного действия, 2 — комбинированными (цифровыми дифференциальными анализаторами), 76 — электронными, 13 — релейными, 3 — механическими, 2 — электронными и механическими; 76 — универсальными, 16 — машинами специального назначения; 20 — малыми, 19 — средними, 48 — большими. Из включенных в перечень машин 79 американских, 11 английских, 2 шведских, 1 голландская, 1 немецкая, 1 австралийская, 1 канадская.

483. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. 10-й список, дополнительный, по состоянию на 10 августа 1953 г.** (Roster of organizations in the field of computers and automation. 10 ed., supplement, information as of August 10, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 6, 13—15 (англ.)

Список входит в сводный список (РЖМат, 1954, 4951).

484. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. 11-й список, дополнительный, по состоянию на 10 сентября 1953 г.** (Roster of organizations in the field of computers and automation. 11 ed., supplement, information as of Sept. 10, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 10—11 (англ.)

Список входит в сводный список (РЖМат, 1954, 4951).

485. **Линия задержки с большим волновым сопротивлением. Карли, Симор** (High-impedance artificial delay lines. Carley William S., Seymour Edward F.), Electronics, 1953, 26, № 4, 188—192, 194 (англ.)

Рассматриваются вопросы проектирования широкополосных линий задержки с распределенными постоянными, имеющих большое волновое сопротивление. Проводится теоретическое рассмотрение простейшей линии задержки с распределенными параметрами, где доказывается, что расширение полосы пропускаемых частот может быть получено лишь за счет снижения волнового сопротивления. Предлагается для расширения полосы частот использовать известный тип линии с «плавающей емкостью». Приведено конструктивное описание, данные и фото таких линий, осциллограммы входных и выходных напряжений. Одна из линий наматывается проводом диаметром 0,04 *мм* на полистироловых сердечниках диаметром 4,7 *мм* и длиной 30 *см*. Вдоль сердечника нанесено серебряной краской 36 полосок, которые использовались в качестве заземляющего электрода. В качестве изоляции сердечника использовалась тефлоновая пленка толщиной 0,075 *мм*. Длина намотки 25 *см*, плотность намотки 625 *вит/см*. Внешний вид концевой части линии задержки, иллюстрирующий детали намотки, вид сердечника и заделку конца намотки, показан на фото.

К реф. 485

На частоте 1000 *гц* линия имеет волновое сопротивление 5830 *ом* и время задержки 3,8 *мксек*. Время нарастания прямоугольного импульса на выходе линии 0,1 *мксек*. *В. А. Зимин*

486. **Феррорезонансный триггер** (Ferro-resonant flip-flop), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 5, 118 A, 120 A (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) о феррорезонансном триггере. Наивысшая рабочая частота триггера 100 *кгц*, коэффициент полезного действия по мощности 90%. Размеры триггера примерно $25\times20\times10$ *мм*. Триггер выдерживает большие ускорения и удары и работает в широком диапазоне температур, влажности и давлений. *Н. Я. Матюхин*

487. **Заинтересованы ли вы в решении проблем..?** (Are you interested in solving problems of . . .), Computers and Automation, 1953, 2, № 4, 33 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Филбрик» (George A. Philbrick Researches, Inc) о продаже стандартных элементов, из которых можно составлять моделирующие устройства.

488. **Готовые вычислительные блоки для секции цифровых вычислительных машин** (Computer building blocks for digital computer sections), Electr. Manufact., 1953, 52, № 3, 174 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3887 –3889.

489. **Преобразователь непрерывных величин в дискретные** (Analog-digital converter), Nucleonics, 1953, 11, № 4, 86 (англ.)

Сообщение фирмы «Колман Энджиниринг» (Coleman Engineering Co.) о выпуске электромеханического декадного преобразователя непрерывно меняющихся величин в дискретные. Скорость работы разряда единиц до 18 000 *об/мин*, минимальный входной момент 0,35 *г-см*. *Н. Я. Матюхин*

490. **Вольтметр с цифровым отсчетом** (Digital voltmeter), Electr. Manufact., 1953, 52, № 1, 210, 212 (англ.)

Сообщение фирмы Non-Linear Systems о выпуске вольтметра с цифровым отсчетом напряжения в двоичной или десятичной системе. Вольтметр имеет автоматическую установку пределов измерений и предназначен для измерения напряжений от 0,001 до 999,9 *в* с точностью до 0,1%.

Входное сопротивление вольтметра 10 *Мом*. Для калибровки и тарировки, т. е. выверки путем сравнения показаний прибора с эталонными значениями (когда разность сводится к минимуму), в вольтметре имеется источник эталонных напряжений. *Б. С. Бородин*

491. **Мощный полупроводниковый триод** (Powerful transistor), Prod. Engng, 1953, 24, № 12, 278 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4971.

492. **Полупроводниковые триоды** (I transistori), Antenna, 1953, 25, № 8, 214—215 (итал.)

493. **Двухпозиционная по фазе схема, построенная с применением германиевых триодов. Бейкер, Либау, Редикер, Рид** (The phase-bistable transistor circuit. Baker R. H., Lebow Irwin L., Rediker Robert H., Reed I. S.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 9, 1119—1124 (англ.)

Описана триггерная схема на германиевых триодах, являющаяся двухпозиционной не по амплитуде, а по фазе. После приложения пускового импульса на двух выходах схемы получаются импульсы, повторяющиеся с частотой в два раза меньшей, чем частота генератора главных импульсов; при этом импульсы одного выхода по отношению к импульсам другого выхода сдвинуты на промежуток времени, соответствующий периоду повторения главных импульсов (первое устойчивое состояние). Во втором состоянии импульсы на обоих выходах схемы отсутствуют.

В схеме используются два германиевых триода, работающие последовательно один за другим, как одноходовые мультивибраторы. На основной электрод каждого из триодов подаются синхронизирующие импульсы отрицательной полярности. Смещение эмиттеров выбирается таким, чтобы эти импульсы не оказывали воздействия на схему до тех пор, пока в цепь эмиттора одного из триодов не поступит положительный пусковой импульс. Положительный импульс заряжает емкость в цепи эмиттера триода и несколько повышает потенциал эмиттера, давая возможность следующему за ним синхронизирующему импульсу отпереть триод. В течение периода времени, когда триод отперт, его выходной импульс заряжает емкость в цепи эмиттера второго триода и следующий синхронизирующий импульс воздействует на второй триод. Выходная цепь второго триода, в свою очередь, передает импульс на вход первого триода, и цикл работы возобновляется. Приводится блок-схема и диаграмма работы двух разрядов двоичного счетчика, построенного на основе этой триггерной схемы.

Как указывается в статье, максимальная частота повторения синхронизирующих импульсов при использовании германиевых триодов типов 1698 и 1734 составляет соответственно 1 и 4 *мгц*; для одного разряда счетчика требуется 6 штук триодов с коэффициентом усиления по току не менее 2 и сопротивлением коллектора не менее 25 *ком*. *Н. И. Бродович*

494. **Являются ли полупроводниковые электронные приборы радиолампами будущего? Гюнтер** (Sind Transistoren die Radioröhren der Zukunft? Günther W. A.), Techn. Rundschau, 1953, 45, № 12,9—11 (нем.)

Рассматривается явление проводимости в полупроводниках, конструкция и работа различных видов электронных полупроводниковых приборов. Автор считает, что на вопрос, поставленный в заглавии статьи, нельзя определенно ответить, поскольку электронные полупроводниковые приборы находятся еще в состоянии развития.

Для полупроводниковых тетродов (РЖМат, 1954, 3139, 3143) G2T10, G2T20, G2T40 приведены максимальные значения напряжения коллектора, мощности рассеяния токов эмиттера и коллектора (для всех типов 60 *в*, 200 *мвт*, 2 *ма*, 5 *ма*), а также данные их типового режима работы (напряжение коллектора 30 *в*, выходная мощность 4 *мвт*, сопротивление нагрузки 20 *ком*, коэффициент усиления мощности 10, 20, и 40 соответственно для типов G2T10, G2T20 и G2T40). Четвертый электрод тетродов является вторым эмиттером. *Н. И. Бродович*

495. **Первый радиоприемник на полупроводниковых триодах. Сото** (El primer receptor con transistores. Soto A.), Radioelectricidad, 1953, 16, 168 (исп.)

Освещается физическая сущность процесса в полупроводниковом триоде. Приводится принципиальная схема первого радиоприемника на двух полупроводниковых триодах типа СК722, из которых первый работает в качестве детектора и усилителя, а второй как усилитель низкой частоты; питание — батарея 3 *в*. Указываются некоторые практические данные о монтаже установки. Приводятся данные о применении полупроводниковых триодов в каскадах предварительного усиления низкой частоты. Даются практические советы о мерах предосторожности при монтаже полупроводниковых триодов с целью недопущения их порчи и преждевременного выхода из строя.

496. **Способ «Тинкертой»** (Operation Tinkertoy), Prod. Engng, 1953, 24, № 10, 206—207 (англ.)

Сообщение о новой автоматической линии для изготовления электронной аппаратуры (см. РЖМат, 1954, 5336). Основные особенности метода: 1) автоматическое изготовление деталей и автоматическая сборка; 2) изготовление узлов аппаратуры из стандартных блоков, так называемых „модулей" (module). „Модули" состоят из 4—6 керамических пластин, на которых укрепляются детали (сопротивления, конденсаторы, индуктивности). При изготовлении

аппаратуры применяется новейшая технология — „печатный" монтаж, тонкие керамические конденсаторы, наклеиваемые сопротивления и автоматическая пайка погружением в припой.

Керамические пластины изготовляются способом прессования смеси талька, каолина и карбоната бария и последующего обжига при температуре 1260°. Производительность пресса 2800 пластин в 1 час, продолжительность обжига 9 час.

Диэлектриком для конденсаторов служит смесь титанатов бария, магния, кальция и стронция. Размеры конденсаторов 12,7×12,7×0,5 *мм*, емкость может варьироваться от 7,0 *μμф* до 0,01 *μф*. Из 2,3 *кг* сырья получается 100 000 штук конденсаторов, отбраковывается только 20% этого количества.

Сопротивления изготовляются нанесением смеси из сажи, смолы и растворителя на асбестовую ленту. Поверх проводящего слоя наносится защитный слой полиэтилена. После этого лента разрезается на 5—6 полосок и наматывается на катушки. Из 23 *м* такой ленты можно изготовить 10 000 сопротивлений от 10 *ом* до 100 *Мом*. Точность сопротивлений ±10% при температурах до 200°, мощность 1/4 *вт*.

После нанесения схемы на керамические пластинки производится сборка деталей на пластинах. Одна машина укрепляет конденсаторы (не более двух штук на каждой стороне керамической пластинки), другая машина наклеивает сопротивления, автоматически отрезая куски ленты в 12,5 *мм* длиной. Затем производится автоматическая пайка и сборка „модулей" (до 1000 модулей в 1 час).

На каждой стадии производственного процесса производится механическая и электрическая проверка. Испытательные данные вводятся с помощью перфокарт. Качество производимых методом „Тинкертой" устройств не ниже изготовляемых ручными способами. Устройства удовлетворяют требованиям военной приемки. *Л. В. Кутуков*

**497. Фенолит для печатных схем** («Phenolite» in printed circuits), Erda, 1953, 25, № 6, 25 (англ.)

Сообщение фирмы «Нейшнл Валканайзд Файбр» (National Vulcanized Fibre Co.) о производстве фенолита с односторонним и двусторонним покрытием медной фольгой. Двустороннее покрытие употребляется главным образом для предотвращения коробления листа. Толщина листов от 0,16 до 0,32 *мм*, размеры 91,5×117 *см*. *Л. В. Кутуков*

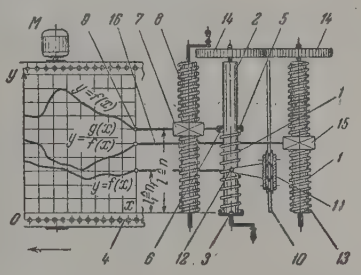
**498. Печатные схемы. Скоу** (Printed circuits. Skow Norman), Soc. Plast. Engrs J., 1953, 9, № 7, 9—12, 38 (англ.)

Подробное описание технологического процесса производства заготовок для печатных схем (металлической фольги, нанесенной на слой пластмассы) и способов травления фольги. Методы нанесения на фольгу самих схем не описаны. Приведен также ряд соображений о способах пайки и сборки узлов из печатных схем. *В. К. Зейденберг*

**499. Механизм для графического вычисления. Корпоо** (A graphic computing device. Korppoo Seppo), State Inst. Techn. Res. Rept., Report 125, 1953, 7pp. (англ.)

Мастерской точной механики Государственного института технических исследований в Хельсинки сконструирован и построен оригинальный прибор для механического вычерчивания графика $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ по двум данным кривым $g(x)$ и $f(x)$. Вследствие особенности конструкции это возможно только в том случае, если $f(x) > g(x) \geqslant 0{,}25 f(x)$ и обе функции не принимают отрицательных значений.

Прибор был заказан в связи с необходимостью математической обработки большого количества удовлетворяющих указанным условиям кривых, получаемых автоматической записью при работах по спектрофотометрическому исследованию растворов в инфракрасных лучах. Принципиальная схема механизма показана на чертеже.




К реф. 499

Кривые $f(x)$ и $g(x)$ нанесены на бумажную ленту *4*, движимую мотором *M* в направлении, показанном стрелкой, со скоростью порядка 25 *мм/мин*. Спиральная пружина *1* надета с малым зазором на валик *2*. Нижний конец ее прикреплен к валику на уровне *x*-оси в точке *3*, а верхний конец прикреплен в точке *6* к муфте *5*. Последняя может перемещаться вдоль валика *2* посредством прикрепленной к ней гайки *7*, поступательное перемещение которой осуществляется вращением винта *8* с таким расчетом, чтобы точка *9* стержня, связанного с гайкой *7* и муфтой *5*, постоянно следила за кривой $f(x)$. При этом переменная длина $l$ пружины постоянно равна соответствующей ординате $f(x)$.

По рельсу *10* с небольшим трением перемещается каретка *11*. К ней прикреплен стержень, точка *12* которого постоянно контактирует с пружиной *1*. Последняя вместе с валиком *2* и муфтой *5* образует своеобразный винт с переменным шагом. Вращение его вызывает поступательное перемещение точки *12* и каретки *11*. Если левый конец стержня, прикрепленного к каретке *11*, следит за кривой $g(x)$, то длина $l_1$ соответствующей ординаты ее пропорциональна количеству $n_1$ витков пружины *1* от точки *3* до точки *12*. При этом

$$\frac{l_1}{l} = \frac{n_1}{n} = \frac{g(x)}{f(x)}; \qquad n_1 = n\,\frac{g(x)}{f(x)};$$

$n = \text{const}$ есть полное число витков пружины *1*.

С другой стороны, число витков $n_1$ пропорционально угловому перемещению валика *2*, связанного посредством пары шестерен *14* с винтом *13*. Поэтому вращение последнего вызывает поступательное перемещение гайки *15*, пропорциональное числу $n_1$, а следовательно, и искомой величине. С гайкой *15* связан стержень *16*. К левому концу его прикреплен карандаш, вычерчивающий кривую, ординаты которой пропорциональны величине $g(x)/f(x)$. Масштаб ординат этой кривой можно менять изменением соотношения шестерен *14* и шага винта *13*.

Обвод данных кривых осуществляется посредством световых зайчиков, направляемых рефлекторами, размещенными под лентой *4* вместе со стержнями *9* и *12*, к которым они прикреплены.

Указано, что пружина была изготовлена из рояльной проволоки ($C = 1{,}2\%$), подвержена отжигу при 350° и медленно охлаждена. Отношение диаметра проволоки к диаметру пружины равно примерно 0,04. Контакт между пружиной *1* и кареткой *11* в точке *12* осуществлен при помощи небольшого постоянного магнита с желобком.

Точность результата, учитывая погрешности обвода, составляет примерно 2%. *А. Б. Штыкан*

**500. Новые инструменты для математических вычислений. Дюбуа** (Nuevos aparatos para operaciones matematicas. Dubois Fr.), Ingenieria naval, 1953, **21**, № 222, 730—737 (исп.)

См. РЖМат, 1953, 967, 968; 1954, 1480.

**501. Универсальная счетная линейка для вычисления углов падения отражающих горизонтов в предположении линейного возрастания скорости. Дейли** (A universal slide rule for computing the dips of reflecting horizons on the assumption of linear increase of velocity. Daly John), Geophysics, 1953, **18**, № 4, 820—823 (англ.)

При обработке результатов сейсмической разведки методом отраженных волн приходится, если предполагать скорость $V_z$ их распространения на глубине $z$, равной $V_0 + kz$, находить угол $\alpha$ из системы уравнений

$$e^{kt/2} = tg\,\alpha/2 \,/\, tg\,\alpha_0/2, \quad \sin\alpha_0 = V_0\Delta t \,/\, \Delta x.$$

Дело сводится к вычислению $\alpha$ по формуле

$$\ln tg\,\alpha/2 = kt/2 - \operatorname{arch} \Delta x/V_0\Delta t.$$

Описана номограмма с подвижными частями, оформленная в двух вариантах (счетный диск и счетная линейка), позволяющая отсчитывать угол $\alpha$ по данным $k$, $\Delta t$, $V_0$, $\Delta x$, $t$ в таких интервалах: $k$ от 0,0 до 1,16, $\Delta t$ от 0,001 до 0,70, $V_0$ от 2200 фут/сек. до 23 000 фут/сек., $\Delta x$ от 200 футов до 10 000 футов. Значения $\alpha$ получаются при этом от 0,25° до 140°. Дано описание устройства прибора, приведены фото обоих вариантов. Указана возможность построения аналогичного прибора для уравнения

$$\xi = (V_0/k)\sinh(kt/2)\sin\alpha.$$

Имеются ссылки на статьи 1932 и 1948 гг. *Е. К. Нечаев*

**502. О конференции работников отдела машин по обработке данных при Математическом институте Чехословацкой академии наук. Свобода** (Z pracovní konference pořádoné oddělenim strojů na zpracování informací při matematickém ustavu Československé akademie věd. Svoboda Antonín), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 27—30 (чеш.)

**503. Работы в области электроники для деловых операций и науки** (Electronic developments for business and science), Scient. American, 1953, **189**, № 5 (англ.)

Сообщение о работах фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand Inc.). Разработаны электронные вычислительные машины «УНИВАК» (UNIVAC) РЖМат, 1954, 1856), ИРА-1101 (ERA-1101), ИРА-1102, ИРА-1103 (РЖМат, 1954, 1849, 1851, 1852), электронная вычислительная машина, работающая на перфокартах, цифровое устройство для обработки торговой информации „Фактроник" (Fac-tronic system) и цифровое устройство для управления воздушным движением (см. реф. 537). Указывается, что фирма принимает заказы на проектирование специализированных вычислительных и управляющих устройств, выполняет вычислительные работы, организует семинары и курсы для подготовки персонала, обслуживающего машины. *В. Д. Князев*

**504. Вопросы механизации учета и вычислительных работ (Обзор литературы). Дроздов Б.,** Вестн. статистики, 1953, № 6,76—83

Обзор книг по вопросам механизации учета и вычислительных работ, изданных за последние годы Госстатиздатом: Механизация учета и вычислительных работ на промышленном предприятии (сб. статей), 1952 г.; Механизация учета и вычислительных работ (сб. статей), 1952 г.; Механизация учета и вычислительных работ (сб. статей), 1953 г.; Пясковский С. В., Светлова Е. Ф., Применение счетных машин в машиносчетном бюро, 1952 г.; Шкодин А. Г., Опыт механизации учета и вычислительных работ в торговых предприятиях, 1953 г.; Вейзе Б. Б., Опыт механизации нормативных расчетов в планировании и учете производства, 1953 г.

**505. Лампы считают. Брейдо И.,** Радио, 1953. № 11, 28—30

Популярное изложение элементов принципа работы цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств. Указываются области применения электронных счетных схем и вычислительных машин. Рассмотрена работа лампового триггера и приведена практическая схема. *Ю. И. Визун*

**506. Методы и границы кибернетики. Куффиньяль** (Méthodes et limites de la cybernétique. Couffignal Louis), Rev. Real acad. cienc. exact. fís. y natur. Madrid, 1953, **47**. № 1, 63—82 (франц.)

Дается критический обзор кибернетики, в частности работ Н. Винера. По мнению автора, кибернетика не является научной теорией. Аналогия между работой следящих систем и деятельностью мозга, проводимая Н. Винером, неправильна, так как, в силу теоремы Бюкнера, следящие системы могут изображать только уравнения Пфаффа, а к этим уравнениям нельзя свести все человеческое мышление. Рассматривая технические применения понятия информации, автор утверждает, что математическая теория связи, предложенная К. Шенноном, дает ошибочное решение задачи о построении кода, максимально сокращающего время передачи дискретных сообщений. Приводится пример кодировки, которая, по словам автора, позволяет получить лучший результат. Пример не ясен: не указана кодировка пробелов между буквами, ввиду чего нельзя однозначно оценить время передачи.

Критика кибернетики автором недостаточно последовательна. Некоторые общие положения автора неприемлемы с точки зрения диалектического материализма. *Г. Н. Поваров*

**507. Исправление** (Correction), Proc. Inst. Radio Engrs, 1954, **42**, № 2, 413 (англ.)

К статье, прореферированной в РЖМат, 1954, 2378.

**508 К. Математические машины. Грушка** (Matematické stroje. Hruška Václav, I. vyd., 131 s.. Nakl. Čs. ak. věd, Praha, 1953, 39 Kčs), Česká kniha, 1954, № 1, 25 (библ.)

**509 К. Думающие машины. Фрейденталь** (Machines pensantes. Freudenthal Hans, Université de Paris, les conferences du Palais de la Découverte. Serie D. № 24, 9 mai 1953, 16 pp., Alençon, Inpr. alenconnaise, 1953, 50 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 4, 77 (библ.)

**510 К. Полупроводниковые триоды. Принципы действия, свойства и применения. Штрутт** (Transistoren. Wirkungsweise, Eigenschaften und Anwendungen. Strutt Maximilian Julius Otto, (Monographien der elektrischen Nachrichtentechnik, Bd. 18), 166 S., Abb., Hirzel, Zürich, 1954, Lw. 12), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 8, 270 (библ.)

**511 К. Полупроводники и их применение в телевидении, радио, электронике. Гарнер** (Transistors and their applications in television, radio, electronics. Garner Louis E., 103 pp., Coyne, Chicago, 1953, 1. 50 doll.), Techn. Book Rev. Index, 1954, 20, № 3, 47 (библ.)

**512 РЕЦ. Логарифмическая линейка. Фрикке** (Der Rechenschieber. Fricke H. W., 2. Aufl., 152 S., 117 Bild., «KAWE» Kommissions-Buchhandlung, Berlin, 3.80 DM) [**Рецензия: Леземан** (Lesemann K.-J.), Werkstatt und Betrieb, 1954, 87, № 3, 153 (нем.)]

**513 РЕЦ. Полупроводниковые триоды и их применения. Ши** (Principles of transistor circuits. Shea Richard F., 535 pp., diagr., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953, 11 doll.) [**Рецензия: Байерс** (Byers Alan C.), J. Franklin Inst., 1954, 257, № 1, 75 (англ.)]

**14 П. Многоанодная триггерная лампа. Вильямс, Андерсен** (Poly-anode flip-flop tube. Williams Charles R., Andersen Chris S.) [Northrop Aircraft, Inc., Hawthorne, шт. Калифорния, США]. Пат. США 2647221, кл. 315—167, 28.07.53

Газоразрядная триггерная лампа с холодным катодом, содержащая два анода и катод. Катод разделен на две части, одна из них взаимодействует с первым анодом, а другая — со вторым. Газовый разряд в лампе может иметь два устойчивых состояния. Если в данный момент времени имеет место разряд между первым анодом и катодом, то второй анод не работает. Переброс газового разряда с одного анода на другой осуществляется с помощью положительных импульсов, подаваемых на катод.

Приведена схема триггера на газоразрядной лампе с двумя анодами. *В. А. Зимин*

**515 П. Стабилизированные триггерные схемы на лампах с холодным катодом. Вильямс, Хейген** (Stabilizing means for cold cathode tube flip-flop circuits. Williams Charles R., Hagen Glenn E.) [Northrop Aircraft, Inc., Hawthorne, шт. Калифорния, США]. Пат. США 2638564, кл. 315—167, 12.05.53

Триггерная схема на лампе тлеющего разряда с холодным катодом (см. реф. 514 П).

Схема управляется импульсами отрицательной полярности, подаваемыми на анод лампы. Входная цепь состоит из диода и переходного конденсатора. Выходные напряжения снимаются с катодных сопротивлений. *В. А. Зимин*

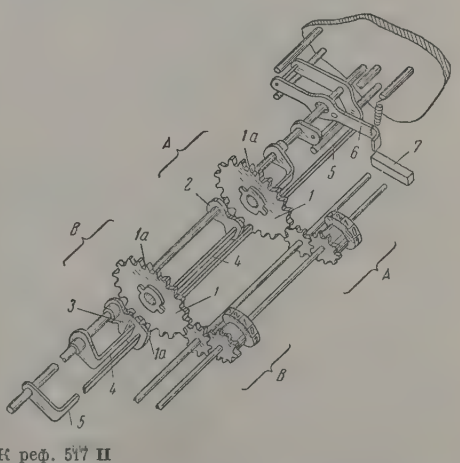
**516 П. Функциональный генератор. Глясс** (Function generator. Glass Paul) [Askania Regulator Co., Чикаго, шт. Иллинойс, США]. Пат. США 2649542, кл. 250—27, 18.08.53

Функциональный генератор на специальной электроннолучевой трубке с плоским лучом. В трубке имеется одна пара отклоняющих пластин, при помощи которых луч отклоняется в направлении, перпендикулярном его плоскости. Мишень трубки состоит из трех частей. Электроны луча попадают одновременно на все три части мишени. Одна из частей мишени имеет постоянную ширину; ширина второй части линейно увеличивается с увеличением угла отклонения луча; третья, наиболее широкая часть, закрыта со стороны пушки специальным экраном, снабженным вырезом.

Плотность тока луча стабилизируется специальной схемой, на вход которой подается напряжение, снимаемое с прямоугольной части мишени. Скорость пилообразной развертки поддерживается постоянной при помощи схемы, управляемой сигналом с той части мишени, ширина которой линейно увеличивается.

Величина сигнала, снимаемого с третьей части мишени, в каждый данный момент времени определяется шириной выреза закрывающего ее экрана в месте облучения. Придавая вырезу различную форму, можно получать на выходе трубки напряжение, изменяющееся по любому закону. *В. Н. Лаут*

**517 П. Устройство для автоматического деления в вычислительных машинах** (Anordning ved regnemaskiner eller liknende for utfering av automatisk divisjon) [Aktiebolaget Facit, Åtvidaberg, Швеция]. Норв. пат. 81229, кл. 42*m*—17, 5.01.53




К реф. 517 П

Устройство имеет своей целью подачу командного импульса механизмам перемещения, когда при

выполнении машиной действия деления частное переходит из положительного в отрицательное.

Элементом, задающим импульс, является (см. фиг.) зубчатое колесо *1*, кинематически связанное с механизмами счетного колеса. Колесо *1* имеет 20 зубцов, из которых два (*1а*), диаметрально противоположные, имеют высоту большую, чем остальные. Эти зубцы, встречаясь с серьгами *2* и *3*, поворачивают их на некоторый небольшой угол. Через скобы *4* и *5*, связанные с серьгами, поворачивается рычаг *6*. Рычаг *6* через деталь *7* передает импульс механизму поразрядного перемещения в тот момент, когда цифровое колесо высшего разряда делимого проходит через ноль, т. е. когда частное становится отрицательным.

Примечание референта. Этот патент является одним из серии патентов, заявленных шведской фирмой «Фацит» на отдельные устройства вычислительной машины. Машина эта характеризуется применением селективной передачи в механизме переноса числа и непрерывной передачей десятка в счетчике посредством планетарной зубчатой передачи.

Схема такого счетчика была разработана еще в прошлом столетии П. Л. Чебышевым. Повидимому, фирма «Фацит» воспользовалась схемой П. Л. Чебышева, дополнив ее элементами автоматизации.

*А. Л. Леймер*

**518 П. Электрифицированная счетная машина с механизмом автоматизации деления. Нёйман-Лециус, Йордан** (Motordriven räkne maskin med automatisk divisionsanordning. Neumann-Lezius H., Jordan K.) [Brunsviga-Maschinenwerke Aktiengesellschaft, Braunschweig, Förbundsrepubliken Tyskland]. Швед. пат. 138814, кл. 42 m: 25, 20.01.53

Автоматизация деления подобна применяемой в машине «Мерседес-Евклид». *Е. А.*

**519 П. Счетная машина с автоматическим умножением, у которой имеется установочный механизм и для множимого, и для множителя** (Regnemaskine til automatisk multiplikation med et indstillingsvaerk for multiplikanden og et for miltiplikator) [Aktiebolaget Facit, Åtvidaberg, Sverige]. Дат. пат. 75764, 27.04.53

Механизм, автоматизирующий сокращенное умножение в вычислительной 10-клавишной машине с колесами Однера (машина «Фацит» и др.).

*Н. П. Вашкевич*

**520 П. Передаточный механизм для счетчика. Блисс** (Transfer mechanism for counters. Bliss Harvey N.) [Veeder-Root, Inc., Hartford, шт. Коннектикут, США]. Пат. США 2628779, кл. 235—139, 17.02.53

В счетчике имеется сменный вал включения с набором цифровых колес, свободно вращающихся на валу. Колеса расположены одно возле другого, имеется сцепляющее устройство для гашения, т. е. установки цифровых колес на нули, передаточное устройство между колесами двух соседних разрядов для передачи десятка, блокирующий механизм, позволяющий вводить в разряд число независимо от операции переноса десятка, блокирующее устройство передаточной шестерни, которое блокирует шестерню от произвольного вращения все время, кроме времени передачи в разряд. *А. К. Леймер*

**521 П. Сдвоенная счетная машина. Пассинский** (Duplex calculating machine. Pasinski Walter J.) [Burroughs Adding Machine Co., Detroit, шт. Мичиган, США]. Пат. США 2638271, кл. 235—62, 12.05.53

Счетная машина имеет два счетчика. Оба счетчика смонтированы как один; высшие разряды, начиная с некоторого, служат первым счетчиком, а низшие — вторым. Имеется устройство для передачи чисел из 1-го счетчика во 2-й и устройство для независимого гашения 1-го и 2-го счетчиков.

*Е. Н. Маквецов*

**522 П. Контрольный механизм счетчика. Флеминг, Овербери** (Counter control mechanism. Fleming Howard M., Overbury Austin A.) [Monroe Calculating Machine Co., Orange, шт. Нью-Джерси, США]. Пат. США 2631779, кл. 235—79, 17.03.53

Механизм, управляющий работой счетчика в автоматических арифмометрах.

**523 П. Механизм управления суммирующим счетчиком. Бойден** (Accumulator drive control mechanism. Boyden Robert E.) [Clary Multiplier Corp., San Gabriel, шт. Калифорния, США]. Пат. США 2648497, кл. 235—60, 11.08.53

Механизм подключения счетчика к ведущему звену, работающий от клавиш управления.

*Е. А. Александрова*

**524 П. Клавиатура счетной машины. Тейлор** (Calculating machine keyboard. Taylor Lawrence B.) [Friden Calculating Machine Co., Inc.]. Пат. США 2628030, кл. 235—145, 10.02.53

Девять цифровых клавишей расположены в середине в трех рядах по три клавиши в ряду. Клавиша «0» расположена слева; клавиши управления расположены по бокам справа и слева от цифровых клавишей. Клавиши управления удлиненной формы с выступающей частью наверху, что является удобным для оператора при быстрой работе слепым методом. *А. К. Леймер*

**525 П. Механизм гашения клавиатуры. Ганг** (Keyboard clearing mechanism. Gang Herman) [Monroe Calculating Machine Co., Орандж, шт. Нью-Джерси, США]. Пат. США 2636679, кл. 235—79, 28.04.53

Механизм для автоматического гашения клавиатуры после операции сложения и вычитания. Механизм управляется двумя клавишами: клавишей NR (гашение набора, Non-Repeat) и клавишей R (повторение, Repeat).

При нажатой клавише NR число, набранное на клавиатуре, автоматически гасится после каждого хода машины и клавиатура подготавливается для набора нового числа. При нажатой клавише R число на клавиатуре не гасится и может быть использовано многократно, например, при умножении или делении. *Е. Н. Маквецов*

**526 П. Машина для печатания данных в регистрационные карточки. Экселл** (Maskin för tryckning på registerkort. Excell A. W.) [Powers-Samas Accounting Machines Limited, Лондон, Великобритания]. Швед. пат. 138913, кл. 43 a: 41 03, 27.01.53

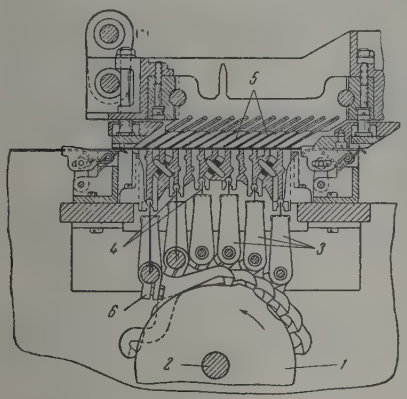
**527 П. Знакопечатающий механизм для счетных машин. Кристиан, Строн, Вильямс** (Symbol printing mechanism for accounting machines. Christian Raymond A., Strachan Andrew J., Williams Paul H.) [The National Cash Register Co., Dayton, Огайо, США], Пат. США 2647688, кл. 235—60.18, 4.08.53

**528 П. Аппарат для пробивки на перфокартах надсечек. Ху** (Apparatus for notching or slotting perforated cards. Hooe Hunter E.) [McBee Co., Athens, шт. Огайо, США]. Пат. США 2630863, кл. 164—111, 10.03.53

Ручной аппарат наподобие обычного дырокола.

**529 П. Механизм для проверки пробивок на перфоленте. Маннинг** (Record perforation analyzing mechanism. Manning Clarence R.) [International Business Machines Corp., New York, шт. Нью-Йорк, США]. Пат. США 2624511, кл. 235—61.11, 6.01.53

Электрическое контрольное устройство (см. фиг.), имеющее кодовый барабан *1*, вращающийся на оси *2*.




К реф. 529 П

Этот барабан собран из отдельных дисков сложной конфигурации, и его можно настроить на определенный ход путем надлежащего расположения уступов на его поверхности. Далее имеется система качающихся контактов *3* с контактными пружинами *4* и контактных щеток *5*. Между щетками и контактами пропускается лента. Контакты в нормальном положении не включены. Включение контактов осуществляется при помощи качающихся кулачков *6*, которыми управляет вышеуказанный вращающийся кодовый барабан. Если пробивка ленты соответствует коду, записанному на барабане, то щетки замыкаются через пробивку с контактами, образуя цепи контроля. Если соответствия нет, то срабатывает цепь сигнализации, фиксируя ошибку в пробивке ленты. *Е. А. Александрова*

**530 П. Карманный счетчик. Лоу** (Vest-pocket type calculator. Lowe Sahn K.). Пат. США 2637497, кл. 235—78, 5.05.53

Вычислительный прибор типа счетного диска. *В. М. Брадис*

**531 П. Бегунок для счетной линейки. Дейви** (Slide rule indicator. Davey Clarence P.) [Eugene Dietzgen Co., Chicago, шт. Иллинойс, США]. Пат. США 2634912, кл. 235—70, 14.04.53

Бегунок для счетной линейки особой конструкции.

**532 Д. Электронный дифференциальный анализатор. Ленов Н. Н.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Энергетический ин-т АН СССР, М., 1954

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

**533. Автоматическое управление полетом с помощью устройства, разработанного Воздушными силами США** (Automatic flight control with Air Force device), Tele-Tech, 1953, **12**, № 7,80 (англ.)

Сообщение о разработанном фирмой «Миннеаполис-Хонейвелл» (Minneapolis-Honeywell Regulator Co.) устройстве AMCC (AMSS — Automatic Master Sequence Selector), выполняющем функции автопилота, по управлению, взлету и посадке самолета. См. РЖМат, 1954, 3166. *В. Б.*

**534. Фирма «Миннеаполис-Хонейвелл» разрабатывает прибор для автоматического управления полетом** (Minneapolis-Honeywell, ARDC develop automatic flight device), Amer. Helicopter, 1953, **30**, № 6, 19 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3166.

**535. Визуальный вычислительный прибор, упрощающий навигацию. Порицкий** (Pictorial computer simplifies navigation. Poritzky Siegbert E.), Aviat. Age, 1953. **20**, № 2, 42—46 (англ.)

Фирма «Аэро Электроникс» (Aero Electronics Co.) разработала визуальный индикатор, значительно упрощающий определение местонахождения самолета.

Визуальный индикатор преобразует данные, полученные от навигационных приборов (азимут и дальность самолета по отношению к маяку), в механическое движение указателя (символического самолета) по карте. Устройство состоит из индикаторного блока (высотой 95 *мм*, диаметром 300 *мм*, весом в 4 *кг*) и блока усилителя. Блок индикатора не монтируется на панели управления самолета, а во время работы размещается на коленях пилота. Маяк, относительно которого берется пеленг, расположен всегда в центре карты, укрепленной на индикаторе. Перемещение указателя на карте производится двумя сервомоторами: азимута и дальности. Диапазон шкалы дальности 27—54—108 *км*. Точность, обеспечиваемая прибором, по дальности $\pm 0{,}7$ *км*, по азимуту $\pm 0{,}5$ градуса. Эти ошибки добавляются к ошибкам основного навигационного прибора.

Одним из преимуществ прибора является то, что с его помощью пилот может выбрать любую траекторию полета, в то время как, используя только основные навигационные приборы, летчик должен лететь по прямой линии на маяк, или, используя блок вычислительного устройства линии курса, только по ломаной линии, выбрав ряд промежуточных точек. *В. П. Парамонов*

536. **Навигационная система «Лоран», дающая непрерывную информацию. Вильямс** (Continuous-indicating Loran navigator. Williams Roger B., Jr.), Electronics, 1953, **26**, № 7, 166—169 (англ.)

Описание автоматической приставки для приемного устройства гиперболической системы дальней навигации «Лоран» (Loran). Приставка предназначена для непрерывного автоматического измерения разности времени между принимаемыми от пары станций сигналами (номера гиперболы).

*В. П. Парамонов*

537. **Магнитное запоминающее устройство для хранения и обработки графиков полетов самолетов** (A magnetic flight plan storage unit), Airports and Air Transp., 1953, **7**, № 103, 117, 123 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о выпуске специального запоминающего устройства на магнитном барабане, предназначенного для хранения и обработки графиков полетов самолетов. Устройство одновременно хранит 2000 графиков. Время вылета самолета, количество горючего, место назначения, маршрут и другие детали графика полета передаются по телеграфу с запрашивающей станции в виде кодов и записываются на магнитный барабан. Затем только что введенная информация сравнивается с графиками, ранее записанными на барабане, исправляется в соответствии с этими графиками и передается обратно на запрашивающую станцию. Главным достоинством нового устройства, по сравнению с человеком и различными механическими устройствами, является большая скорость обработки большого количества информаций. Местонахождение графика полета определенного самолета определяется с помощью цифрового кода, записываемого на барабане вместе с графиком. Поиск нужного графика занимает 0,4 сек. Скорость обработки данных, поступающих от телетайпов, составляет 23 000 знаков в 1 сек. (знаком является цифра или буква, выраженная пятизначным телеграфным кодом). На барабан можно записать 312 000 знаков (букв либо цифр). Скорость работы устройства такова, что для автоматической передачи всех записанных данных в течение 10 мин. требуется 100 телетайпов, работающих на максимальной скорости.

*Л. С. Легезо*

538. **Система с магнитным запоминающим устройством, помогающая управлять воздушным движением** (Magnetic memory system to aid air traffic control), Skyways, 1953, **12**, № 10, 31 (англ.)

См. реф. 537.

539. **Применение вычислительных машин для автоматического управления. Рис** (Applying computers to machine control. Rees Mina), Mach. Design, 1953, **25**, № 10, 324, 327—328, 331, 334 (англ.)

Отмечаются два направления развития цифровых вычислительных машин в ближайшем будущем: 1) создание малогабаритных машин высокой надежности с помощью кристаллических диодов, кристаллических триодов и печатных схем; 2) соединение новых быстродействующих запоминающих устройств большой емкости (магнитные статические запоминающие устройства; РЖМат, 1954, 2754—2755) с уже существующими быстродействующими арифметическими схемами. В связи с этим указывается на возможность применения цифровых вычислительных машин для автоматического управления производственными процессами, в частности для управления полностью автоматизированными заводами. Сообщается, что в США проектируются полностью автоматизированные заводы по изготовлению печатных схем и специальных электронных ламп. Вместе с тем автор указывает, что в некоторых областях производства человек не может быть заменен автоматами. Отмечается, что цифровые вычислительные машины, способные выполнять сложные логические операции и изменять свою работу в зависимости от полученных результатов и обладающие при этом быстрой реакцией, могут обеспечить управление заводами в случае неожиданных обстоятельств (аварий и т. п.), которое в таких случаях сейчас передается человеку даже на заводах, работающих при нормальном режиме автоматически.

Указывается, что так как цифровые вычислительные машины выполняют только работы, точно предусмотренные программами, то внедрению машин в каждую новую область должен предшествовать полный и подробный анализ решаемой задачи.

Как пример применения цифровой вычислительной машины для автоматического управления в промышленности описывается экспериментальный копировально-фрезерный станок Массачусетского технологического института. В обычных копировально-фрезерных автоматах движение режущего инструмента задается копиром с помощью копировального прибора, ощупывающего профиль копира. В описываемом станке копир и копировальный прибор заменены цифровой вычислительной машиной. Требуемый профиль задается численно и вводится в вычислительную машину на перфорированной ленте.

Машина управляет режущим инструментом с помощью промежуточной следящей системы. Вследствие замены дорогостоящих копиров перфорированными лентами затраты на подготовительные работы значительно снижаются. Благодаря этому станок обладает большой гибкостью и экономичностью.

Затем кратко указывается на разработки по применению цифровых вычислительных машин в учетно-плановом и банковском деле. В конце статьи упоминаются устройства автоматического регулирования типа гомеостата Ашби (W. R. Ashby).

*Г. Н. Поваров*

540. **Электротехнические исследования в США. Вауэлс** (Research in electrical engineering in the U.S.A. Vowels R. E.), Electr. Engr and Merchandiser, 1953, **30**, № 1, 11—13 (англ.)

Сообщается, что в Массачусетском технологическом институте (MIT) разработана система управления вертикальным копировально-фрезерным станком цифрового типа, задание данных для которой может производиться с любой степенью точности (см. реф. 539).

Там же построена вычислительная машина «Вихрь I», имеющая запоминающее устройство на специальных запоминающих трубках с частотой выборки чисел 20 *кгц*.

Разрабатываются магнитные запоминающее элементы. В Калифорнийском университете в Лос-Ан-

желосе и в Калифорнийском технологическом институте созданы первоклассные вычислительные центры. *Н. Я. Матюхин*

**541. Механическая обработка с помощью чисел** (Machining by the numbers), Mill and Factory, 1953, 53, № 2, 91 (англ.)

Краткое сообщение о разработке Массачусетским технологическим институтом установки для автоматического управления фрезерными станками (см. реф. 539). Приведено фото станка и управляющего устройства. *Л. В. Кутуков*

**542. Вычислительные машины на заводе. Браун** (Computers in the factory. Brown David W.), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 1—5 (англ.)

Автор рассматривает вопрос о применении цифровых методов управления объектами в обрабатывающей промышленности и, в частности, применительно к металлорежущим станкам.

В 1950 г. фирма «Арма» (Arma Corporation) разработала устройство управления металлорежущим станком «Армаматик» (Armamatic). Команды для перемещения режущего инструмента кодировались определенным, перфорированным на широкой ленте, числом, которое преобразовывалось устройством в напряжение, управляющее приводом инструмента. Подача инструмента происходила до тех пор, пока поданное напряжение не уравнивалось напряжением, полученным с потенциометра или индукционного генератора, связанного с перемещающимся инструментом. При обработке достигалась точность до 0,01 *мм*.

Цифровые управляющие устройства другого типа построены фирмой «Дако Машин Компани» (Daco Machine Company), лабораторией фирмы «Белл» (Bell Telefon) (для управления копировально-фрезерным станком) и др. В этих устройствах команда вводится в виде числа, перфорированного на ленте. Наличие пробивки в определенной позиции на ленте дает команду, перемещающую определенный элемент станка на 1 шаг.

Для получения желательной точности эти шаги должны быть меньше, чем допустимая ошибка в точности изготовления. Сложные вычисления для кодировки команд производились на цифровых вычислительных машинах.

Описываются подобные же устройства, дающие перемещение инструмента по трем координатам ($x, y, z$), причем одно устройство дает перемещение от точки к точке по прямой (линейная интерполяция), а другое — по плавной кривой (применяется интерполяция 3-й степени).

Стоимость цифровых управляющих устройств порядка 5000—25 000 долларов.

Сообщается, что две машиностроительные фирмы заключили контракты с другими организациями на изготовление цифровых управляющих устройств. *В. Д. Князев*

**543. Управление технологическими процессами. Сперри** (Process monitoring. Sperry Albert F.), Instruments, 1953, 26, № 7,1014—1016, 1038—1041 (англ.)

Рассматриваются принципы централизации управления непрерывными технологическими процессами, предусматривающие выполнение оператором только функций контроля правильности хода процесса и выдачи соответствующих команд при нарушениях или авариях.

Обсуждается применение для этой цели мнемонических схем технологического процесса, систем предупредительной сигнализации и непрерывного обследования и контроля значений параметров режима в большом числе точек, а также устройств для автоматической записи этих параметров.

Для записи большого числа параметров, получаемых от обследующих устройств, работающих при нарушениях нормального режима с повышенной скоростью, рекомендуется использовать запоминающие устройства на конденсаторах, ферромагнетиках, магнитной ленте и т. п., связанные с преобразователями непрерывных данных в цифровые с последующей записью цифровых данных на телетайпе.

Приводятся примеры некоторых многоточечных систем контроля температуры, выполненных фирмой «Лидс энд Нортроп» (Leeds and Northrup Co.), и компанией «Сан Ойл» (Sun Oil) на своих заводах. Упоминается о разработке фирмой «Дженерал Электрик» (GEC) специального ртутно-струйного коммутирующего устройства, обеспечивающего скорость обследования до 1800 точек в 1 сек. при малом уровне помех, связанных с коммутацией. *Б. Я. Коган*

**544. Автоматическое вычисление цветовых различий. Оплер, Мейкл, Чарльзуэрт** (Automatic calculation of color differences. Opler Ascher, Meikle Richard W., Charlesworth Mary Jean), J. Optical Soc. America, 1953, 3, № 7, 550—551 (англ.)

Описание пересчета колориметрических характеристик материалов в координаты равноконтрастного пространства, определяемого преобразованиями Адамса (Adams E. O., J. Optical Soc. America, 1942, 32, 168). Вычисления выполнялись на табуляторе 405 и вычислительном перфораторе 602-А фирмы ИБМ. Время, необходимое для расчета координат цвета в пространстве Адамса, составляет от 2 мин. до 50 сек. на образец, если вести расчет для большой группы — около 100 образцов. *М. Г.*

**545 П. Двухканальное устройство для измерения частоты повторения импульсов. Дженсен, Мак-Геох** (Dual-channel counting rate meter. Jensen Garold K., McGeogh James E.). Пат. США 2638273, кл. 235—92, 12.05.53

Устройство для регистрации частоты повторения сигналов, меньших или больших определенной величины, поступающих из одного источника. Устройство имеет два выхода, на одном из которых регистрируется частота повторения сигналов, превосходящих определенную величину, на другом — сигналов, меньших этой величины.

*П. П. Головистиков*

**546 П. Распределительная система для электрических сигналов. Ньюман, Дейвис, Брейбрук** (Electrical signal distribution system. Newman Edward Arthur, Davies Donald Watts, Braybrook Ronald Fraser) [National Research Development Corp., Лондон, Англия]. Пат. США 2645714, кл. 250—27, 14.07.53

Распределительная система, состоящая из дешифратора, потенциалы входных шин которого подаются на сетки электронных ламп (триоды), объеди-

ненных общим катодом. Количество ламп равно числу выходных шин дешифратора. Каждая лампа имеет отдельный выход с анодной цепи, соединенный с соответствующей ему вентильной схемой. Приводится схема всей распределительной системы. *В. Н. Аверин*

**547 П. Автоштурман с записью от аэролага и компаса.** Мак-Г и (Aerial dead reckoning true plotting navigator. McGee Elbert B.). Пат. США 2636673, кл. 235—61, 28.04.53

Механическое решающее устройство, служащее для записи параметров полета и одновременно допускающее визуальное наблюдение показаний прибора. *Г. О. Фридлендер*

---

См. также: 262

# АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


А

Абдуллаев Т. Г. 433
Абрамов А. А. 430
Авалишвили В. И. 450 Д
Агабабян Е. Х. 271
Агостинелли 263
Айгнер 105
Айрапетян С. С. 398 Д
Александров А. Д. 424
Альфорс 190 К
Америо 208
Андерсен 514 П
Анкочеа 83
Аояма 369
Апарисио Э. 167 Д
Апаро 475
Арнольд 394
Арсов 463
Архангельский В. А. 432
Аткинсон 347
Ауберт 107

Б

Бабкин Б. Н. 223
Байерс 513 РЕЦ
Банах 318 К
Бант 395
Барбери 370
Барбилян 420
Барбэлат 382
Баренблатт Г. И. 273
Барратт 141
Баулин В. И. 79 Д
Баумен 191 К
Бауэр 224
Башкиров Н. М. 389 Д
Бейкер 493
Беккенбах 245
Беккер 335
Белл 15 К
Бенедикти 402
Бенц 108
Берджесс 127
Берман Г. Н. 16 К, 72 К
Бертолини 169
Бес 379
Био М. 300
Бицадзе А. В. 238, 239, 306
Бламбер 170
Блисс 520 П
Боас 180
Бойден 523 П
Бондарь Н. Г. 479
Бопп 333
Борегар 297
Боровиков В. А. 135
Бошер 478
Брадис В. М. 13 К
Брандт 75 РЕЦ
Браун 542
Браун 321
Брейбрук 546 П
Брейдо И. 505
Броден 331
Бронштейн Б. С. 38
Брун 441
Брусотти 405 РЕЦ
Бувье 312
Буланов А. И. 448 РЕЦ
Булиган 228 РЕЦ, 388 РЕЦ
Булыгин В. Я. 179
Бургер 142
Бьюленд 262

В

Валирон 171
Вандивер 56
Вауэлс 540
Вегнер 192 РЕЦ, 278
Вейганд 445 К
Вейер 139
Вейнбергер 248
Вейсман 290
Венков Б. А. 423
Вилларс 372 РЕЦ
Вильгельм 89 РЕЦ
Вильямс 514 П, 515 П
Вильямс 527 П
Вильямс 536
Вильямс 383
Виноградов И. М. 36
Винтнер 237
Винченсини 418
Вирзинг 43
Виттих 197
Витушкин А. Г. 148
Влодарский 327
Ворлитцки 316 К
Воронов А. А. 218
Вудс 431
Вулфсон 337

Г

Гаврилов 466 РЕЦ
Гаврилов Н. И. 231 Д
Гаврилов Ю. М. 436, 437
Ганг 525 П
Гарнер 511 К
Гартштейн Б. Н. 367
Гельфанд 89 РЕЦ
Гельфер С. А. 178
Ги 341
Гласс 516 П
Глоден 51
Годо 7
Голднер 386
Голубчиков А. Ф. 84
Гольдберг А. А. 182
Грабарь М. И. 203
Грант 217
Грилицкий Д. В. 313 Д
Гринберг Г. А. 285
Гротендик 350
Грушка 508 К
Губа Е. Д. 391
Гуд 294
Гумовский 320, 322
Гуи Шэн 174, 175
Гюнтер 494

Д

Давенпорт 329
Даинелли 475
Далла Вольта 421
Даффин 241, 303
Дейви 531 П
Дейвис 546 П
Дейли 501
Делаво 247, 250
Демут 468
Деэвель 144
Джарден 315
Джеймисон 343
Джексон 468
Джексон 245
Дженкинс 188
Дженсен 545 П
Джон 276
Джулиано 323
Дзядик В. К. 160
Дзядык 160
Диас 248
Доммаш 261
Дробот 330
Дроздов Б. 504
Дугол 325
Дьёдонне 100, 113
Дюбуа 500
Дюнген 249
Дюран 296
Дюфрен 357

Е

Ельшин М. И. 209
Еругин Н. П. 227 РЕЦ

Ж

Жерме 307

З

Заикина Н. Г. 77 Д
Залгаллер В. А. 419
Занден 446 К
Зеленин Е. В. 396 К
Зоннер 117
Зубов В. И. 221

И

Иванова М. А. 416 Д
Ивс 22 К
Идзуми 164
Икеда 95
Исман 33 К
Ито М. 114
Ишии 409

Й

Йейтс 228 РЕЦ
Йокобори 377
Йордан 518 П
Йоффе 451

К

Кавагути 412
Кавата 362, 363
Калаби 146
Кале 67

Калужнин 91
Камерон 338
Кампеделли 405 **РЕЦ**
Кампейн 104
Кантер 272
Канцкий 225 **К**
Капильдео 177
Капуано 129
Карли 485
Карлиц 39, 55, 58, 98
Кармазина Л. Н. 449 **Д**
Карманов В. Г. 252 **Д**, 427
Карпелевич Ф. И. 101
Кассина 29
Кастро 216
Кастольди 408, 414
Касьянков П. П. 289
Катетов 120
Като 339, 344
Кафьеро 155, 156, 157
Кац 246
Каэн 256
Кваде 199
Кендалл 373 **РЕЦ**
Керкпатрик 356
Кертисс 373 **РЕЦ**
Кизини 18
Кламкин 319
Клейн 468
Кнастер 121, 128, 130
Кнёдель 75 **РЕЦ**
Кнезер 145
Коллац 434, 439
Колмогоров А. Н. 358
Коломбо 254
Компанеец А. С. 288
Конт 201
Конте 385
Копленд 115
Коровкин П. П. 14 **К**
Королюк В. С. 374 **Д**
Корпоо 499
Корчовский 387 **РЕЦ**
Кошелев А. И. 240
Кошляков В. Н. 194
Крамер 364
Красовский Н. Н. 210
Криккеберг 152
Кристиан 527 **П**
Крон 333
Крянгэ 68
Кудрявцев Л. Д. 149, 150
Кузнецов П. И. 375
Кузьмин П. А. 212
Кук 202
Куратовский 132
Куффиньяль 506

Л

Ладбрук 255
Лалагю 165
Ландау 81
Ларченко Е. Г. 448 **РЕЦ**
Латышева К. Я. 198
Лебедев А. В. 193 **Д**
Лебедев Н. Н. 285
Лединегг 301
Лежанский 351, 352
Леземан 512 **РЕЦ**
Леккеркеркер 154
Леман 472
Ленов Н. Н. 532 **Д**
Лески 280
Лехто 181
Ли 272
Либау 493
Либерман 406
Ливовский 378
Лихолетов И. И. 24 **Д**
Лоренц 166 **К**
Лоренцен 103
Лос 311
Лоу 530 **П**
Лукасевич 35 **К**
Лумис 353 **К**
Луньков А. П. 397 **Д**
Лутце 467 **РЕЦ**
Льюс 136
Люст 266
Люстерник Л. А. 426, 435
Ляпин Е. С. 11 **К**

М

Магнус 17
Майлс 269
Мак-Геох 545 **П**
Мак-Ги 547 **П**
Мак-Нил 440
Малавар 478
Малкин И. Г. 211, 227 **РЕЦ**
Малкус 299
Мамедов И. Г. 220
Маннинг 529 **П**
Марквальд 26
Маркова В. А. 308 **Д**
Маркус 158
Мацуяма 164
Медель В. Б. 86
Медлин 85
Мейзлик 438
Мейкл 544
Меляховецкий А. С. 309
Мёснер 53, 60
Мередит 30, 31
Мерли 326
Метрополис 468
Миколайская С. 205
Минорский 215
Монтгомери 267
Монтель 183
Моор 422
Мордухов 314
Морозов В. И. 230 **Д**
Морошкин Г. Ф. 390 **Д**
Морс 188
Мостовский А. 25
Моуфанг 17
Мураками 102
Мустафин Х. А. 366 **Д**
Мурье 359
Мюллер 282

Н

Нагелль 48
Найто С. 114
Накано 346
Накано 106
Неванлинна 192 **РЕЦ**
Невилл 137
Нёйман-Лециус 518 **П**
Неймарк Ю. И. 257
Нидем 23 **РЕЦ**
Никитин А. К. 243
Никитин Н. Н. 9
Никольский А. А. 268
Новак 119
Номидзу 407
Ньюман 546 **П**

О

Овербери 522 **П**
Оллереншоу 45
О'Мира 88
Опайц 68
Оплер 544
Орведал 468
Осипова М. З. 417 **Д**

П

Падмавалли, 118, 123, 153
Палама 52, 64
Паллю-де-Ла-Барьер 345
Паннис 264
Пасинский 521 **П**
Пейсер 246
Пенсмай 447 **К**
Перепелкин Д. И. 12 **К**
Перес 66
Пиза 54
Пиккерт 388 **РЕЦ**
Пинль 403
Пирсон 56
Плоткин Б. И. 90
Поваров Г. Н. 458, 459
Погребысский И. Б. 73 **К**
Полак А. И. 189
Попович 63, 65
Порицкий 535
Пуанкаре 10 **К**
Пуату 44
Пуппе 145
Пуэнсело 284
Пфетцер 40
Пфлюгер 176
Пьяджо 415 **РЕЦ**

Р

Рамни 82
Расин 151
Расселл 443
Рвачева Е. Л. 2
Редеи 46
Редикер 493
Редхеффер 342
Рейнер 242
Рейфенберг 133
Рейхбах 128, 130
Решетняк Ю. Г. 419
Рёйтер 293
Рёрль 185
Ригли 444
Рид 493
Ридо 295
Рис 539
Ритт 349
Ричардсон 468
Роббинс 461
Робертсон 173
Робинсон 34 **К**
Робинсон 99
Родосский К. А. 37
Ронкин Л. И. 159
Росандер 371 **РЕЦ**
Рошкулец 186
Рубин Б. И. 259
Рубинович 281
Румер Ю. Б. 413
Русу 62

С

Садовский 274
Сальвадори 334 **К**
Самнер 195
Сампфорд 372 **РЕЦ**
Сангрен 201, 292
Сандон 371 **РЕЦ**
Сапа В. А. 265
Саульев В. К. 429
Саясов Ю. С. 288
Свешников А. Г. 277
Свобода 502
Сегре 401
Селе 93, 94
Сельберг 74 **РЕЦ**
Серс 275
Сигел 324
Силадьи 380 **К**
Симор 485
Сингх 168
Ситников К. 134
Скальская И. П. 285
Скоу 498
Слейтер 162
Слуцкий 456 **РЕЦ**
Смирнов В. И. 187
Смирнов Ю. М. 116
Смит 59
Смит 196
Соболев С. Л. 232
Сопер 464
Сото 495
Спампинато 400
Спасский Р. А. 229 **Д**
Спейн 415 **РЕЦ**
Сперри 543
Старжинский В. М. 213
Стебаков С. А. 206
Стерн 299
Стернберг 274
Стивенсон 286, 287
Стокер 270
Стоккер 298
Стратонович Р. Л. 375
Стреб 122
Строн 527 **П**
Субханкулов М. А. 76 **Д**
Сульдин А. В. 354 **Д**
Суэнсон 480
Сфредда 365 **К**
Ся Дао-син 172

**Т**

Такэда 336
Талаквадзе Т. В. 399 Д
Там Цой-так 200
Тандаи 411
Тебо 70
Тейкроу 456 **РЕЦ**
Тейлор 524 **П**
Теллеген 462
Терпстра 368
Тёрёк 422
Тихонов В. И. 375
Тобиаш 290
Томлинсон 452
Тоноока 410
Трефц 266
Тумаркин Л. А. 125

**У**

Уайберн 124
Уайтхед 143
Уэйл 360
Уинтер 23 **РЕЦ**
Улер 61
Урбан 404
Урбан 301
Урбаник 121
Уфлянд Я. С. 285
Уэйнберг 260

**Ф**

Фейген 338
Фельдткеллер 467 **РЕЦ**
Фенье 348
Ферри 304
Фибер 291
Финслер 384
Флагг 453 **К**
Флейшман Н. П. 279
Флеминг 522 **П**
Флойд 138
Фляте 184
Фогель 251 **К**
Фолькман 41, 42
Фор 340
Форте 359
Фостер 319
Фрёйд 163
Фрёйденталь 509 **К**
Фрейм 99
Фрикке 512 **РЕЦ**
Фукс 80, 92
Фурес-Брюа 234

**Х**

Хаген 253
Хадвигер 425
Халилов З. И. 233
Хамстром 126, 131
Харада 222
Харари 115
Харрингтон 283
Хартман 237
Хас 204
Хейген 470, 515 **П**
Хейтинг 32
Хемер 50
Хенрич 236
Херстейн 109
Херш 176
Хиггинс 112
Хигиман 97
Хлтон 141
Хинчин 74 **РЕЦ**
Хмелев Н. Н. 317 **К**
Холл 392
Хольман 293
Хольцер 47
Хопф 140
Хорват 69
Хорних 235
Хофрейтер 75 **РЕЦ**
Ху 528 **П**
Хухунайшвили Г. Е. 147 Д

**Ц**

Цесарец 393
Циммерман 465
Цутикура 164
Цыпкин Я. З. 258, 376
Цюльсдорф 457, 466 **РЕЦ**

**Ч**

Чакалов Л. 226 **К**
Чарльзуэрт 544
Черри 328
Чжоу Хун-цзин 161
Чиммино 244
Чорэнеску 442
Чунихин С. А. 96

**Ш**

Шарль 110, 111
Швархёйзер 28
Ши 513 **РЕЦ**
Шенфельд 305 **К**
Шеппард 292
Шестаков А. А. 207
Шёнерштедт 316 **К**
Шидловский А. Б. 78 Д
Шиманов С. Н. 219
Ширяева Е. В. 355 Д
Шкрашек Йосеф 19
Шлютер 266
Шмид 316 **К**
Шорм 5
Штрутт 510 **К**
Шульц-Грунов 302

**Э**

Эгервари 87
Эльзессер 332
Экман 146
Экселл 526 **П**
Эстрин 473

**Ю**

Юл 373 **РЕЦ**
Юнггрен 49
Юшков П. П. 428

**Я**

Яблонский С. В. 27, 460
Яглом А. М. 361
Якобчик 57
Яновская 387 **РЕЦ**
Ятаев М. 214

---

**A**

Agosttnelli C. 263
Ahlfors L. V. 190 **K**
Aigner A. 105
Amerio L. 208
Ancochea G. 83
Andersen Ch. S. 514 **П**
Aoyama H. 369
Aparo E. 475
Arnold K. 394
Arsove M. G. 463
Atkinson F. V. 347
Aubert K. E. 107

**B**

Baker R. H. 493
Banach S. 318 **K**
Barbălat I. 382
Barberi B. 370
Barbilian D. 420
Barratt M. G. 141
Bauer W. F. 224
Beauregard O. C. de 297
Beckenbach E. F. 245
Becker H. 335
Bell E. T. 15 **K**
Benedicty M. 402
Benz H. 108
Berman G. N. 16 **K**
Bertolini F. 169
Besse L. 379
Blámbert M. 170
Bliss H. N. 520 **П**
Boas R. P. Jr. 180
Bopp K. 333
Boscher J. 478
Bouligand G. 228 **РЕЦ**, 388 **РЕЦ**
Bouvier P. B. 312
Bowman F. 191 **K**
Boyden R. E. 523 **П**
Brandt H. 75 **РЕЦ**
Braun J. H. 321
Braybrook R. F. 546 **П**
Brodin J. 331
Brown D. W. 542
Brun V. 441
Brusotti L. 405 **РЕЦ**
Buland R. N. 262
Bunt L. N. H. 395
Burger E. 142
Burgess C. E. 127
Byers A. C. 513 **РЕЦ**

**C**

Cafiero F. 155, 156, 157
Cahen G. 256
Calabi E. 146
Cameron R. H. 338
Campaigne H. H. 104
Campedelli L. 405 **РЕЦ**
Capildeo R. 177
Carley W. S. 485
Carlitz L. 39, 55, 58, 98
Cassina U. 29
Castoldi L. 408, 414
Castro A. de 216
Cesarec R. 393
Charles B. 110, 111
Charlesworth M. J. 544
Cherry C. E. 328
Chisini O. 18
Chow Hung Ching 161
Christian R. A. 527 **П**
Cimmino G. 244
Ciorănescu N. 442
Collatz L. 434, 439
Colombo G. 254
Conte L. 385
Conte S. D. 201
Cooke K. L. 202
Copeland A. H. 115
Couffignal L. 506
Cramer H. 364
Creangă I. 68
Curtiss J. H. 373 **РЕЦ**

**D**

Dainelli D. 475
Dalla Volta V. 421
Daly J. 501
Davenport W. B., Jr.
Davey C. P. 531 **П**
Davies D. W. 546 **П**
Deheuvels R. 144
Delavault H. 247, 250
Demuth H. B. 468
Diaz J. B. 248
Dieudonné J. 100, 113
Dommasch D. O. 261
Dougall J. 325
Drobot S. 330
Dubois Fr. 500
Duffin R. J. 241, 303
Dufresne P. 357
Dungen F. H. van den 249
Durand E. 296

**E**

Eckmann B. 146
Egervary E. 87
Elsässer H. 332
Estrin G. 473
Eves H. 22 **K**
Excell A. W. 526 **П**

**F**

Fagen R. E. 338
Faure R. 340
Feldtkeller R. 467 **РЕЦ**
Fenyö I. 348

Ferri A. 304
Fieber H. 291
Finsler A. 384
Flathe H. 184
Fleming H. M. 522 II
Floyd E. E. 138
Flugge W. 453 K
Fortet R. 359
Foster R. M. 319
Fourès-Bruhat Y. 234
Frame J. S. 99
Freud G. 163
Freudenthal H. 509 K
Fricke H. W. 512 РЕЦ
Fuchs L. 80, 92

G

Gang H. 525 II
Garner L. E. 511 K
Gawrilow M. A. 466 РЕЦ
Gelfand I. M. 89 РЕЦ
Germay R. H. 307
Giuliano L. 323
Glass P. 516 II
Gloden A. 51
Godaeux L. 7
Goldner F. M. 386
Good R. H., Jr. 294
Grant R. B. 217
Grothendieck A. 350
Gumowski I. 320, 322
Günther W. A. 494
Guy R. 341

H

Haas F. 204
Hadwiger H. 425
Hagen G. B. 253
Hagen G. E. 470, 515 II
Hall M., Jr. 392
Hamstrom M.-E. 126, 131
Harada Sh. 222
Harary F. 115
Harrington R. F. 283
Hartman Ph. 237
Hemer O. 50
Henrici P. 236
Hersch J. 176
Herstein I. N. 109
Heyting A. 32
Higgins P. J. 112
Higman D. G. 97
Hilton P. J. 141
Hofreiter N. 75 РЕЦ
Hollmann G. 293
Holzer L. 47
Hooe H. E. 528 II
Hopf H. 140
Hornich H. 235
Horváth J. 69
Hruška V. 508 K

I

Ikeda M. 95
Ishii Y. 409
Issmann S. 33 K
Izumi S. 164

J

Jackson J. B. 468
Jackson L. K. 245
Jakobczyk F. 57
Jamison S. L. 343
Janowska Z. 387 РЕЦ
Jarden D. 315
Jenkins J. 188
Jensen G. K. 545 II
Joffe S. A. 451
John F. 276
Jordan K. 518 II

K

Kale M. N. 67
Kaloujnine L. 91
Kanckỳ J. 225 K
Kanter I. 272
Kapuano I. 129
Katětov M. 120
Kato T. 339, 344
Katz S. 246
Kawaguchi M. Jr. 412
Kawata T. 362, 363
Kendall M. G. 373 РЕЦ
Khinchin A. Y. 74 РЕЦ
Kirkpatrick P. 356
Klamkin M. S. 319
Klein E. 468
Knaster B. 121, 128, 130
Kneser M. 145
Knödel W. 75 РЕЦ
Korczowski H. 387 РЕЦ
Korppoo S. 499
Krickeberg K. 152
Kron A.-W. 333
Kuratowski C. 132

L

Lalaguë P. 165
Landau H. G. 81
Lebow I. L. 493
Ledinegg E. 301
Lee E. H. 272
Lehmann N. J. von 472
Lehto O. 181
Ljunggren W. 49
Lekkerkerker C. G. 154
Lesemann K.-J. 512 РЕЦ
Lesky P. 280
Leżański T. 351, 352
Libermann P. 406
Livovschi L. 378
Loomis L. H. 353 K
Loos H. R. 311
Lorents G. G. 166 K
Lorenzen P. 103
Lowe S. K. 530 II
Luce R. D. 136
Ludbrook L. C. 255
Łukasiewics J. 35 K
Lutze E. 467 РЕЦ
Lüst R. 266

M

McGee E. B. 547 II
McGeogh J. E. 545 II
MacNeal R. H. 440
Magnus W. 17
Malavard L. 478
Malkus L. S. 299
Manning C. R. 529 II
Marcus S. 158
Markwald W. 26
Matsuyama N. 164
Medlin G. W. 85
Meikle R. W. 544
Mejzlík L. 438
Meredith C. A. 30, 31
Merli L. 326
Metropolis N. 468
Miles J. W. 269
Minorsky N. 215
Moessner A. 53, 60
Montel P. 183
Montgomery D. J. 267
Moór A. 422
Morduchow M. 314
Morse M. 188
Moufang R. 17
Mourier E. 359
Murakami Sh. 102
Müller R. 282

N

Nagell T. 48
Nakano H. 346
Nakano N. 106
Needham J. 23 РЕЦ
Neumann-Lezius H. 518 II
Nevanlinna R. 192 РЕЦ
Neville E. H. 137
Newman E. A. 546 II
Nomizu K. 407
Novák J. 119

O

Ollerenshaw K. 45
O'Meara O. T. 88
Opaiț Gh. 68
Opler A. 544
Orvedahl W. 468
Overbury A. A. 522 II

P

Padmavally K. 118, 123, 153
Palamà G. 52, 64
Pallu de La Barrière R. 345
Pasinski W. J. 521 II
Pearson E. H. 56
Peiser A. M. 246
Peres N. J. C. 66
Pfetzer W. 40
Piaggio H. T. H. 415 РЕЦ
Pickert G. 388 РЕЦ
Pincemaille F. 447 K
Pinl M. 403
Piza P. A. 54
Pfluger A. 176
Poincaré H. de 10 K
Poincelot P. 284
Poitou G. 44
Popoviciu T. 63, 65
Poritzky S. 535
Punnis B. 264
Puppe D. 145

Q

Quade W. 199

R

Racine C. 151
Rayner M. E. 242
Rédei L. 46
Redheffer R. M. 342
Rediker R. H. 493
Reed I. S. 493
Rees M. 539
Reichbach M. 128, 130
Reifenberg E. R. 133
Reuter H. 293
Richardson J. H. 468
Rideau G. 295
Ritt R. K. 349
Robbins L. C. 461
Robertson M. S. 173
Robinson A. 34 K
Robinson G. de B. 99
Rosander A. C. 371 РЕЦ
Roșculeț M. N. 186
Röhrl H. 185
Rubinowicz A. 281
Rumney M. 82
Russell J. P. 443
Rusu E. 62

S

Sadowsky M. A. 274
Salvadori M. G. 334 K
Sampford M. R. 372 РЕЦ
Sanden H. von 446 K
Sandon F. 371 РЕЦ
Sangren W. C. 201, 292
Schlüter A. 266
Schmid W. 316 K
Schönfeld H. 305 K
Schultz-Grunow F. 302
Schwabhäuser W. 28
Sears W. R. 275
Segre B. 401
Selberg S. 74 РЕЦ
Seymour E. F. 485
Sfredda C. 365 K
Shea R. F. 513 РЕЦ
Sheppard C. W. 292
Shönerstedt J. 316 K
Siegel K. M. 324
Singh S. K. 168
Skow N. 498
Slater N. B. 162
Slutskii E. E. 456 РЕЦ
Smith N. H. 59
Smith R. A. 196
Sonner H. 117
Soper P. F. 464
Sorm F. 5
Soto A. 495
Spain B. 415 РЕЦ
Spampinato N. 400
Sperry A. F. 543
Stern M. E. 299
Sternberg E. 274
Stevenson A. F. 286, 287
Stoker J. J. 270